



А.Н. Ткачёв, Е.Н. Епишков

**Теоретические основы электротехники.
Расчёт линейных электрических цепей**

Учебное пособие

Образовательное учреждение высшего образования
«Южно-Уральский технологический университет»

А.Н. Ткачёв, Е.Н. Епишков

**Теоретические основы электротехники.
Расчёт линейных электрических цепей**

Учебное пособие

Челябинск

2021

Авторы:

А.Н. Ткачёв – кандидат технических наук, доцент кафедры «Техника и технологии» ОУ ВО «Южно-Уральский технологический университет»;

Е.Н. Епишков – кандидат технических наук, доцент кафедры «Техника и технологии» ОУ ВО «Южно-Уральский технологический университет», доцент кафедры «Энергообеспечение и автоматизация технологических процессов» ФГБОУ ВО «Южно-Уральский государственный аграрный университет»

Рецензенты:

М.Р. Хаматдинова – к.т.н., доцент кафедры «Техника и технологии» ОУ ВО «Южно-Уральский технологический университет»;

Ю.П. Ильин – к.т.н., доцент кафедры «Энергообеспечение и автоматизация технологических процессов» ФГБОУ ВО «Южно-Уральский государственный аграрный университет»;

И.Б. Царев – к.т.н., доцент, доцент кафедры «Электрооборудование и электротехнологии» ФГБОУ ВО «Южно-Уральский государственный аграрный университет»

Ткачёв, А.Н., Епишков, Е.Н.

Теоретические основы электротехники. Расчёт линейных электрических цепей: уч. пособие [Электронный ресурс] / А.Н. Ткачёв, Е.Н. Епишков. – Челябинск: ОУ ВО «Южно-Уральский технологический университет», 2021. – Режим доступа: <https://www.inuесо.ru/rio/2021/978-5-6046573-0-0.pdf>, свободный. – Загл. с экрана. – 108 с.

ISBN 978-5-6046573-0-0

Содержание учебного пособия соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего образования по направлению подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника (уровень бакалавриат).

В учебном пособии представлена теоретическая информация и раскрыты методы расчета линейных цепей постоянного тока, однофазных и трехфазных линейных цепей синусоидального тока, приведены примеры решения задач для данных цепей. Пособие иллюстрировано большим количеством схем и рисунков.

Учебное пособие предназначено для обучающихся по направлению подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, является единым для всех форм обучения.

Текстовое электронное издание

Минимальные системные требования:

Компьютер: процессор AMD, Intel от 1ГГц, 100 Мб HDD, ОЗУ от 1 Гб,

Видеоадаптер от 1024 Мб, Сетевой адаптер 10/100/1000 Мб/с;

Клавиатура; Мышь; Монитор с разрешением от 800х600;

Операционная система: Windows XP SP3/Vista/7/8/10;

Программное обеспечение: Adobe Acrobat Reader, браузер Internet Explorer, Mozilla Firefox и др. Скорость подключения от 10 Мб/с.

© ОУ ВО «Южно-Уральский
технологический университет», 2021
© А.Н. Ткачёв, Е.Н. Епишков, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1 ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА.....	8
1.1 Электрическая цепь, законы Ома и Кирхгофа	8
1.2 Преобразование схем замещения электрических цепей	11
1.3 Методы расчета линейных электрических цепей постоянного тока	17
1.3.1 Метод уравнений Кирхгофа.....	17
1.3.2 Метод контурных токов	19
1.3.3 Метод узловых напряжений	21
1.3.4 Метод наложения.....	24
1.3.5 Метод эквивалентного генератора	25
1.3.6 Энергетический баланс в электрической цепи	28
1.4 Пример расчёта линейной цепи постоянного тока.....	28
ГЛАВА 2 ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ОДНОФАЗНОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА	36
2.1 Общие сведения	36
2.2 Действующее значение синусоидального тока.....	37
2.3 Векторная диаграмма	38
2.4 Резистор в цепи синусоидального тока	39
2.5 Катушка индуктивности в цепи синусоидального тока.....	40
2.6 Конденсатор в цепи синусоидального тока	42
2.7 Цепь, содержащая резистор и индуктивную катушку	44
2.8 Цепь, содержащая резистор и конденсатор.....	46
2.9 Последовательное соединение резистора, катушки и конденсатора.....	48
2.10 Параллельное соединение резистора, катушки и конденсатора	49
2.11 Мощность цепи синусоидального тока	58
2.12 Комплексный метод расчёта цепей синусоидального тока. Комплексные изображения синусоидальных функций времени.....	60
2.13 Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме для линейных цепей синусоидального тока.....	61
2.14 Резонанс в электрических цепях	67
2.15 Повышение коэффициента мощности в цепях синусоидального тока	70
ГЛАВА 3 ТРЁХФАЗНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА.....	72
3.1 Общие сведения	72
3.2 Трёхфазные системы	72
3.3 Схемы соединения трёхфазных цепей.....	74

3.4	Симметричный режим работы при соединении нагрузки в звезду	76
3.5	Симметричный режим при соединении нагрузки треугольником	78
3.6	Мощность симметричной трёхфазной системы	79
3.7	Несимметричный режим работы трёхфазной цепи при соединении нагрузки в звезду с нейтральным проводом.....	80
3.8	Несимметричный режим работы трёхфазной цепи при соединении нагрузки в звезду без нейтрального провода	81
3.9	Несимметричный режим работы трёхфазной цепи при соединении нагрузки в треугольник	83
3.10	Мощности несимметричной трёхфазной цепи	84
3.11	Измерение мощности в трёхфазных цепях	85
3.12	Примеры расчёта трёхфазных цепей	90
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....		106

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие предназначено для помощи обучающимся в усвоении разделов линейные цепи постоянного тока, однофазные линейные цепи синусоидального тока и трехфазные линейные цепи синусоидального тока курса теоретических основ электротехники (ТОЭ) и электротехники.

Электротехника – это наука о практическом применении электрических и магнитных явлений. Электрическая энергия применяется во всех областях деятельности человека. Её уникальные свойства обеспечивают преимущество перед другими видами энергии: относительная простота получения; простота передачи при минимуме потерь; высокий КПД преобразования в другие виды энергии; простота изменения параметров; почти мгновенная передача к потребителю.

Задачей данной дисциплины является изучение качественной и количественной стороны электромагнитных явлений и процессов, происходящих в электротехнических устройствах. Изучение представленных разделов теоретических основ электротехники позволяет усвоить основные пути решения задач, которые возникают в специальных дисциплинах.

Дисциплина «Теоретические основы электротехники» является базовой для изучения таких специальных дисциплин, как:

- электроника;
- электрические и электронные аппараты и т. д.

Цели освоения дисциплины:

- формирование у студентов системы знаний методов анализа электрических и магнитных цепей как математических моделей электротехнических объектов;
- исследование электромагнитных процессов, протекающих в современных электротехнических установках при различных энергетических преобразованиях;

- освоение современных методов моделирования электромагнитных процессов с использованием современных технологий;
- освоение методов и технических средств испытаний и диагностики электрооборудования, применяемых в рамках изучения курса дисциплины.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

ОПК-3: Способен использовать методы анализа и моделирования электрических цепей и электрических машин:

ОПК-3.1: Использует методы анализа и моделирования линейных и нелинейных цепей постоянного и переменного тока;

ОПК-3.2: Использует методы расчета переходных процессов в электрических цепях постоянного и переменного тока;

ОПК-3.3: Применяет знания основ теории электромагнитного поля и цепей с распределенными параметрами;

ОПК-3.4: Демонстрирует понимание принципа действия электронных устройств.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать:

- методы анализа и моделирования линейных и нелинейных цепей постоянного и переменного тока;
- методы расчета переходных процессов в электрических цепях постоянного и переменного тока;
- основы теории электромагнитного поля и цепей с распределенными параметрами;
- принципы действия электронных устройств.

Уметь:

- применять методы анализа и моделирования линейных и нелинейных цепей постоянного и переменного тока;

- применять методы расчета переходных процессов в электрических цепях постоянного и переменного тока;
- применять знания основ теории электромагнитного поля и цепей с распределенными параметрами;
- использовать принципы действия электронных устройств.

Владеть:

- методами анализа и моделирования линейных и нелинейных цепей постоянного и переменного тока;
- методами расчета переходных процессов в электрических цепях постоянного и переменного тока;
- навыками применять знания основ теории электромагнитного поля и цепей с распределенными параметрами;
- пониманием принципа действия электронных устройств.

Содержание пособия раскрывает теоретические и практические аспекты решения задач по рассматриваемым разделам курса. Описаны существующие и наиболее часто встречающиеся методы расчета линейных электрических цепей. Приведены примеры решения задач с подробным и последовательным описанием, что позволит освоить представленные темы обучающимся с различным уровнем подготовки.

Учебное пособие предназначено для обучающихся по направлению подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника (уровень бакалавриат), соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего образования (ФГОС ВО) по данному направлению подготовки, и является единым для всех форм обучения.

ГЛАВА 1 ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

1.1 Электрическая цепь, законы Ома и Кирхгофа

Электрическая цепь – это совокупность источников электрической энергии, нагрузки и соединительных проводов, образующих замкнутые контуры, по которым течет электрический ток. Направленное движение электрических зарядов в проводящей среде происходит за счет источников электрической энергии цепи. Причем движение зарядов не приводит к перемещению проводящего электрический ток вещества. Для расчета электрических цепей обычно составляют схемы замещения, в которых реальные элементы цепи представляются их расчетными моделями. На схеме замещения (рисунок 1.1) реальный источник электрической энергии с электродвижущей силой (э.д.с.) E и внутренним сопротивлением R_0 может быть представлен двумя способами:

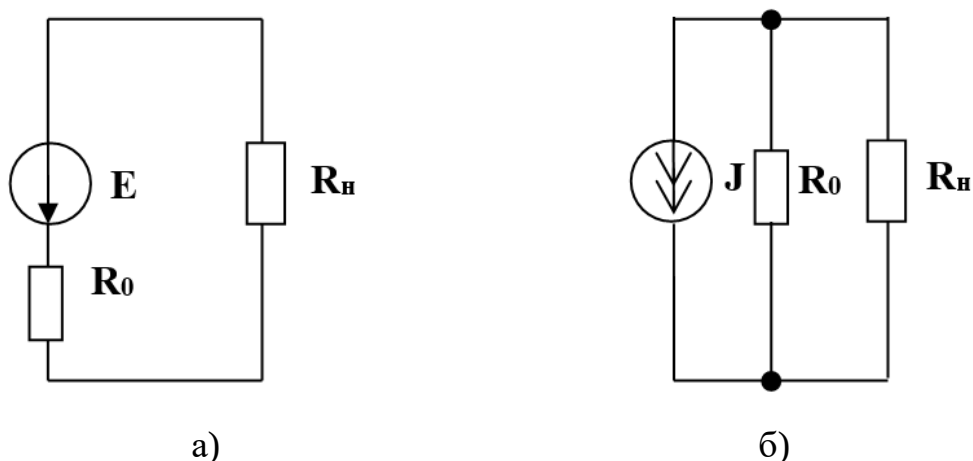


Рисунок 1.1 – Схемы замещения реального источника электрической энергии: а) источник ЭДС; б) источник тока

Схемой замещения с идеальным источником э.д.с. (рисунок 1.1, а), внутреннее сопротивление которого равно нулю, и схемой замещения с идеальным источником тока J (рисунок 1.1, б). Такой источник имеет

бесконечно большое внутреннее сопротивление, и создаваемый им ток не зависит от сопротивления внешней цепи (R_n).

В зависимости от решения конкретной задачи удобнее пользоваться либо последовательной схемой замещения (рисунок 1.1, а), либо параллельной (рисунок 1.1, б). Нагрузка в цепях постоянного тока на схемах замещения представляется резистивным элементом (резистором) R_n . Если сопротивление резисторов электрической цепи не зависит от токов в них или приложенных к ним напряжений, то такую цепь называют линейной. Основными законами электрических цепей, описывающими любые режимы их работы, являются закон Ома и законы Кирхгофа.

Закон Ома для участка цепи выражает прямую пропорциональность между напряжением на зажимах резистора и током, протекающим через него. К примеру, напряжение на резисторе R_n (рисунок 1.1, а):

$$I = \frac{U}{R}, \quad (1.1)$$

где I – сила тока в данной ветви, А; U – напряжение на данном участке цепи;

R – сопротивление участка цепи, Ом.

Последовательная схема (рисунок 1.1, а) рассчитывается с помощью закона Ома для полной цепи:

$$I = \frac{E}{R_0 + R_n}. \quad (1.2)$$

Возможны два крайних случая:

1) Холостой ход: когда внешняя цепь разомкнута (R_n), ток в цепи равен нулю ($I = I_{xx} = 0$) и напряжение $U = U_{xx} = E$.

2) Короткое замыкание: когда сопротивление нагрузки $R_n = 0$. В этом случае напряжение на выводах источника $U=0$, а ток в цепи может достигать весьма больших значений, так как обычно $R_0 \ll R_n$. Любые режимы работы этой цепи при изменении сопротивления нагрузки находятся между ними.

Круг задач в электротехнике не ограничивается простыми (неразветвленными) цепями. Чаще встречаются сложные (разветвленные)

цепи, в которых токи и напряжения на разных участках различны. Сложные цепи бывают с одним источником электрической энергии и с несколькими. Пример такой цепей приведен на рисунке 1.2.

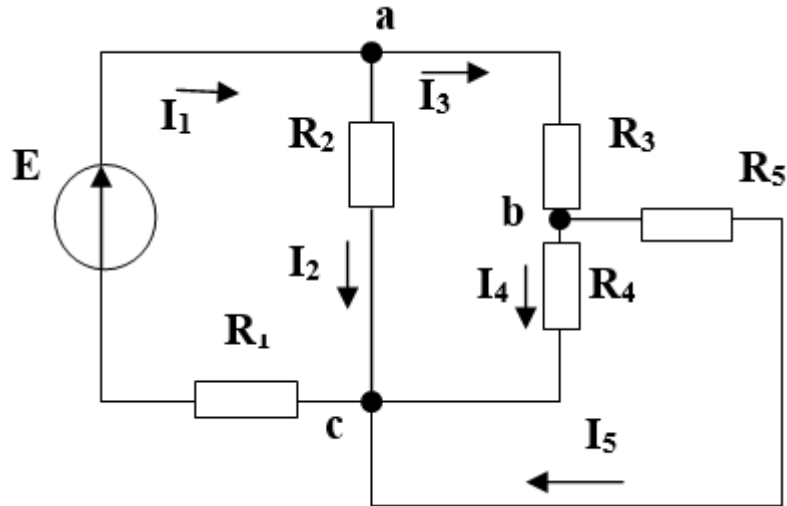


Рисунок 1.2 – Пример сложной электрической цепи

Для разветвленных цепей вводят понятия узла, ветви и контура. Узел – это точка электрической цепи (схемы замещения), где сходятся не менее трех проводников. Точки a , b , c – узлы (рисунок 1.2). Ветвью называют участок, соединяющий два узла. В каждой ветви течет свой ток, который один и тот же для всех элементов этой ветви. Контур представляет собой путь вдоль ветвей электрической цепи, начинающийся и заканчивающийся в одной и той же точке. Для схемы замещения рисунка 1.2 можно выделить контуры, содержащие источник E , резисторы R_1 , R_2 ; контур, содержащий узлы abc и т.д.

Первый закон Кирхгофа устанавливает связь между токами в узле электрической цепи и формулируется: алгебраическая сумма токов ветвей, сходящихся в узле электрической цепи, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^N I_k = 0, \quad (1.3)$$

где I_k – сила тока в k -той ветви, А.

При составлении уравнения по первому закону Кирхгофа в выражении (1.3) токи, подтекающие к узлу, считают положительными, а оттекающие от

узла – отрицательными (или наоборот). Для узла с схемы замещения (рисунок 1.2) уравнение по первому закону Кирхгофа будет иметь вид:

$$I_2 + I_4 - I_1 + I_5 = 0,$$

а для узла b:

$$I_3 - I_4 - I_5 = 0.$$

Второй закон Кирхгофа устанавливает связь между напряжениями и э.д.с. в контуре: алгебраическая сумма падений напряжений вдоль замкнутого контура сложной электрической цепи равна алгебраической сумме э.д.с., действующих в этом контуре:

$$\sum_{k=1}^N I_k * R_k = \sum_{k=1}^M E_k, \quad (1.4)$$

где I_k – сила тока в k-той ветви, А; R_k – сопротивление k-го элемента, Ом;

E_k – ЭДС k-го источника, В.

Для записи уравнения по второму закону Кирхгофа сначала выбирают направление обхода, контура (по часовой стрелке или против). То есть э.д.с., которые совпадают с направлением обхода контура, берутся положительными, а не совпадающие – отрицательными. Падение напряжения на резисторе записывается со знаком «плюс», если направление тока в нем совпадает с направлением обхода контура. Для контура, содержащего источник и резисторы R_1 и R_2 (рисунок 1.2), уравнение по второму закону Кирхгофа будет иметь вид:

$$I_1 * R_1 + I_2 * R_2 = E, \quad (1.5)$$

соответственно для контура abc:

$$I_3 * R_3 + I_4 * R_4 - I_2 * R_2 = 0. \quad (1.6)$$

1.2 Преобразование схем замещения электрических цепей

В большинстве случаев преобразование схем замещения электрических цепей приводит к их упрощению и облегчению расчета. Различают последовательное, параллельное и смешанное соединение элементов схем замещения. Рассмотрим эти виды соединений и способы их преобразования. При последовательном соединении (рисунок 1.3, а) по всем элементам протекает один и тот же ток. На основании второго закона Кирхгофа можно записать:

$$U = I * R_1 + I * R_2 = I * (R_1 + R_2). \quad (1.7)$$

Последовательное соединение резисторов обычно представляется одним эквивалентным резистором R_3 , и для эквивалентной схемы замещения (рисунок 1.3, б) можно записать:

$$U = I * R_3.$$

Сравнивая выражения для напряжения U в исходной и эквивалентной схемах, нетрудно увидеть, что $R_3 = R_1 + R_2$.

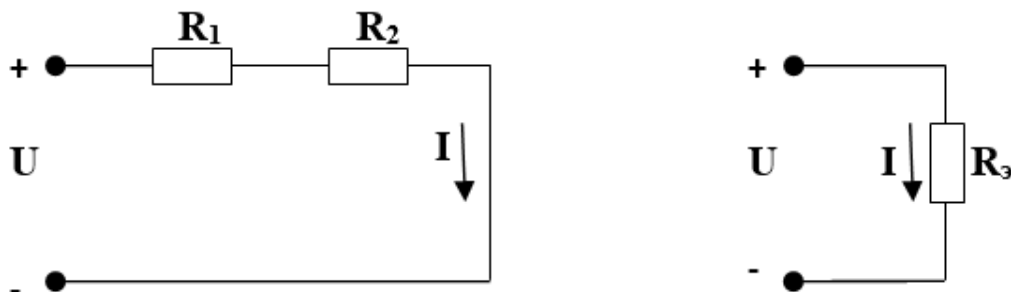


Рисунок 1.3 – Последовательное соединение элементов электрической цепи

Для n последовательно соединенных резисторов сопротивление эквивалентного резистора определяется как:

$$R_3 = \sum_{k=1}^N R_k. \quad (1.8)$$

Параллельное соединение резисторов характеризуется тем, что они находятся под одним напряжением U (рисунок 1.4, а).

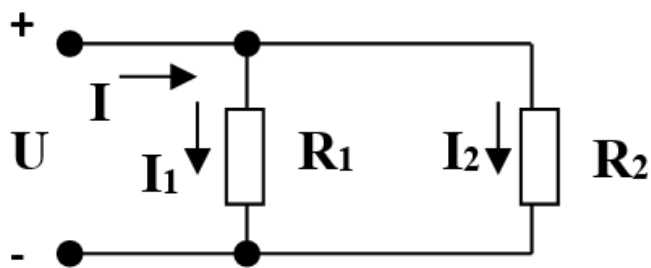


Рисунок 1.4 – Параллельное соединение резисторов

По первому закону Кирхгофа для исходной схемы (рисунок 1.4, а) можно записать:

$$I = I_1 + I_2. \quad (1.9)$$

Расписав токи в параллельных ветвях по закону Ома, будем иметь:

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}; \quad (1.10)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (1.11)$$

Пример: Рассчитать токи в ветвях схемы приведённой на рисунке 1.5. Сопротивление элементов цепи: $R_1=5$ Ом, $R_2=10$ Ом, $R_3=10$ Ом. Напряжение источника: $U=100$ В.

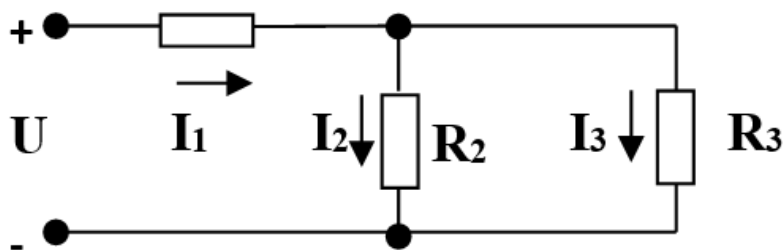


Рисунок 1.5 – Схема к примеру расчёта разветвлённой цепи

На первом этапе производится расчёт общего сопротивления цепи. Общее сопротивление цепи находится как сумма сопротивления R_1 и параллельного соединения сопротивлений R_2 и R_3 .

$$R_{\text{общ}} = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}.$$

Сила тока I_1 находится по закону Ома для участка цепи:

$$I_1 = \frac{U}{R_{\text{общ}}}.$$

Для нахождения силы тока во второй и третьей ветви необходимо рассчитать Напряжение на параллельном соединении:

$$U_{23} = I_1 * \frac{R_2 * R_3}{R_2 + R_3}.$$

Согласно законам параллельного соединения:

$$U_{23} = U_2 = U_3.$$

Применяя закон Ома, находим токи I_2 и I_3 .

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2};$$

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3}.$$

Произведя расчёты по приведённым формулам получаем результаты $I_2 = 5 \text{ A}$; $I_3 = 5 \text{ A}$; $I_1 = 10 \text{ A}$.

На практике встречаются участки цепи, в которых нет возможности использовать формулы последовательного и параллельного соединения. В этом случае целесообразно воспользоваться эквивалентной заменой треугольника трехлучевой звездой резисторов R_a , R_b , R_c или обратной заменой трёхлучевой звезды треугольником R_{ab} , R_{bc} , R_{ca} .

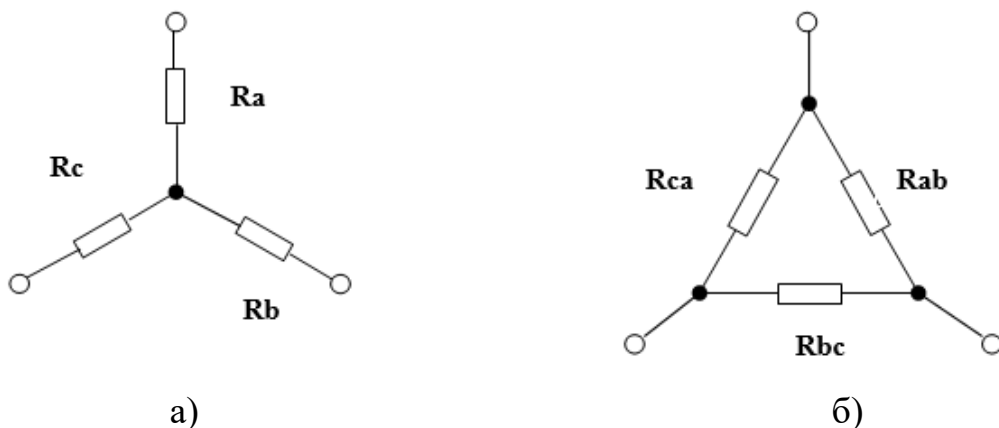


Рисунок 1.6 – Соединение нагрузки в звезду (а) и треугольник (б)

В этом случае по известным значениям сопротивлений резисторов сторон треугольника (R_{ab} , R_{bc} , R_{ca}) определяются сопротивления резисторов лучей звезды по следующим формулам:

$$R_a = \frac{R_{ab} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}; \quad (1.12)$$

$$R_b = \frac{R_{ab} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}; \quad (1.13)$$

$$R_c = \frac{R_{bc} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}. \quad (1.14)$$

Если требуется эквивалентная замена звезды резисторов треугольником, то для определения сопротивлений резисторов сторон треугольника по известным значениям сопротивлений резисторов лучей звезды можно воспользоваться соотношениями:

$$R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_a \cdot R_b}{R_c}; \quad (1.15)$$

$$R_{bc} = R_b + R_c + \frac{R_b \cdot R_c}{R_a}; \quad (1.16)$$

$$R_{ca} = R_c + R_a + \frac{R_c \cdot R_a}{R_b}. \quad (1.17)$$

В качестве примера рассмотрим расчёт разветвлённой цепи постоянного тока с использованием эквивалентной замены.

Пример: Определить силу тока, протекающего через источник в схеме изображённый на рисунке 1.7. Сопротивление элементов цепи $R_1=10$ Ом, $R_2=30$ Ом, $R_3=30$ Ом, $R_4=10$ Ом, $R_5=30$ Ом. Напряжение источника $U=200$ В.

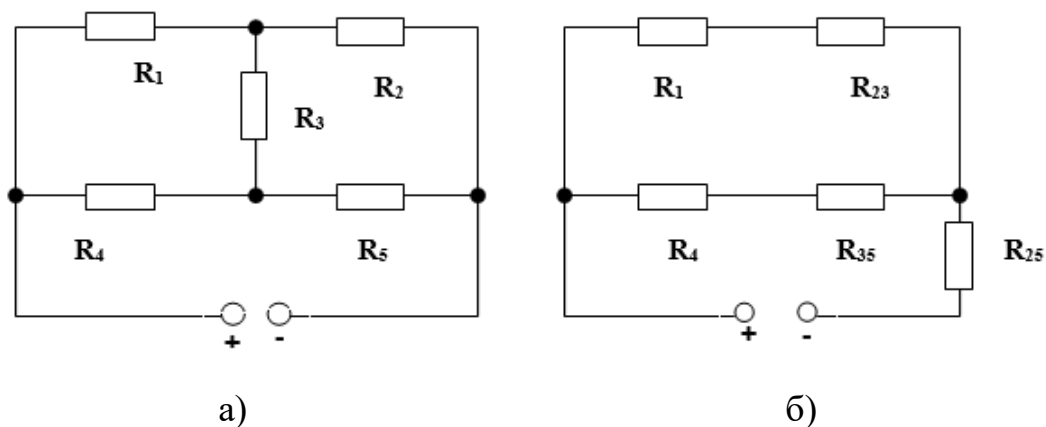


Рисунок 1.7 – Преобразование треугольника R_2, R_3, R_5 в схеме (а) в звезду R_{23}, R_{35}, R_{25} в схеме (б)

Данная задача решается в 2 этапа: 1) определение общего сопротивления цепи; 2) расчет тока через источник по закону Ома.

1) Расчёт общего сопротивления начинается с эквивалентной заменой треугольника сопротивлений R_2, R_3, R_5 звездой R_{23}, R_{35}, R_{25} . Расчёт лучей звезды осуществляется по формулам:

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 * R_3}{R_5} = 10 \text{ Ом};$$

$$R_{35} = R_3 + R_5 + \frac{R_3 * R_5}{R_2} = 10 \text{ Ом};$$

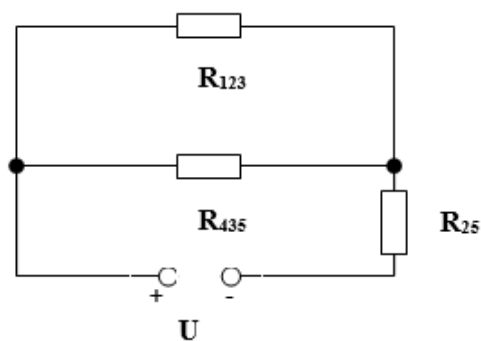
$$R_{25} = R_2 + R_5 + \frac{R_2 * R_5}{R_3} = 10 \text{ Ом}.$$

В результате замены схема принимает вид, изображённый на рисунке 1.7, б. Анализируя полученную схему, мы видим последовательно соединённые участки, состоящие из резисторов R_1 и R_{23} , а также R_4 и R_{35} . Применяя законы последовательного соединения находим сопротивления ветвей:

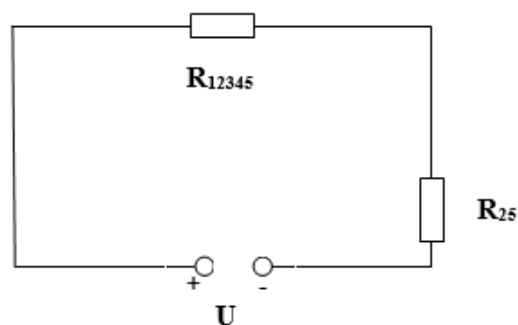
$$R_{123} = R_1 + R_{23} = 20 \text{ Ом};$$

$$R_{435} = R_4 + R_{35} = 20 \text{ Ом}.$$

После данных преобразований упрощённая схема принимает вид (рисунок 1.8, а):



а)



б)

Рисунок 1.8 – К расчёту полного сопротивления цепи

Применяя законы параллельного соединения проводников рассчитываем величину сопротивления R_{12345} (рисунок 1.8, б).

$$R_{12345} = \frac{R_{123} * R_{435}}{R_{123} + R_{435}} = 10 \text{ Ом.}$$

Общее сопротивление цепи может быть найдено с помощью выражения:

$$R_{\text{общ}} = R_{12345} + R_{25} = 20 \text{ Ом.}$$

2) После нахождения общего сопротивления цепи сила тока через источник может быть найдена по закону Ома:

$$I = \frac{U}{R_{\text{общ}}} = 10 \text{ А.}$$

1.3 Методы расчета линейных электрических цепей постоянного тока

Расчет электрической цепи обычно заключается в нахождении токов в ветвях при заданных значениях сопротивлений резисторов, известных э.д.с. или токов источников тока.

1.3.1 Метод уравнений Кирхгофа

Расчет разветвленной цепи с произвольным числом источников электрической энергии путем непосредственного применения уравнений Кирхгофа заключается в составлении системы уравнений для цепи по первому и второму законам Кирхгофа. Количество уравнений в системе равно числу неизвестных токов, т. е. числу ветвей схемы. Сначала составляются уравнения по первому закону Кирхгофа, число этих уравнений должно быть на единицу меньше числа узлов рассматриваемой цепи. Оставшиеся уравнения системы составляются по второму закону Кирхгофа. Количество этих уравнений определяется числом ветвей (неизвестных токов) за вычетом числа уравнений, составленных ранее по первому закону Кирхгофа. При этом уравнения составляются для независимых контуров.

Независимый контур – контур, отличающийся от ранее рассмотренных хотя бы одним элементом цепи. Перед расчетом выбирают произвольно положительные направления токов в ветвях и на схеме проставляют стрелки, указывающие эти направления. Если в результате решения системы уравнений ток в ветви получился отрицательным, то это означает, что направление тока в этой ветви противоположно тому, как это показано стрелкой на схеме.

Пример: Составить уравнения по правилам Кирхгофа для цепи, приведённой на рисунке 1.9.

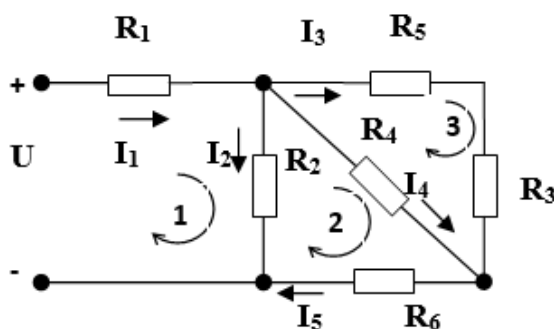


Рисунок 1.9 – Схема к примеру написания уравнений по правилам Кирхгофа

Данная схема содержит три узла. Следовательно, количество уравнений по первому правилу Кирхгофа равно двум. Составим уравнение для верхнего узла и для правого нижнего узла:

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0;$$

$$I_3 + I_4 - I_5 = 0.$$

При расстановке знаков в этих уравнениях мы руководствовались принципом: если ток входит в узел, то пишется с плюсом; если направлен из узла – то с минусом. В данной схеме содержится три независимых контура. Запишем уравнения для контуров 1, 2, 3. Направления обхода контура в этих схемах показаны круглыми стрелками.

Уравнение для контура 1:

$$I_1 * R_1 + I_2 * R_2 = U.$$

Для контура 2:

$$I_4 * R_4 + I_5 * R_6 - I_2 * R_2 = 0.$$

Для контура 3:

$$I_3 * (R_5 + R_3) - I_4 * R_4 = 0.$$

1.3.2 Метод контурных токов

В этом методе считают, что в каждом независимом контуре сложной цепи протекает свой условный, так называемый контурный ток. И система уравнений составляется не для действительных токов в ветвях, а относительно новых неизвестных – контурных токов. Это обстоятельство позволяет сократить число неизвестных токов (уменьшить количество расчетных уравнений в системе) до числа независимых контуров. Если в схеме (рисунок 1.9) задача определения токов по методу уравнений Кирхгофа сводится к решению системы из пяти уравнений, то по методу контурных токов достаточно решить систему из трех уравнений, так как в этой схеме всего три независимых контура. После вычисления контурных токов нетрудно найти

действительные токи в ветвях, как это будет показано ниже, путем составления простых соотношений, в которых токи в ветвях выражаются через найденные контурные токи. Рассмотрим расчет токов в схеме (рисунок 1.10) методом контурных токов, в которой известны значения сопротивлений резисторов и э.д.с.

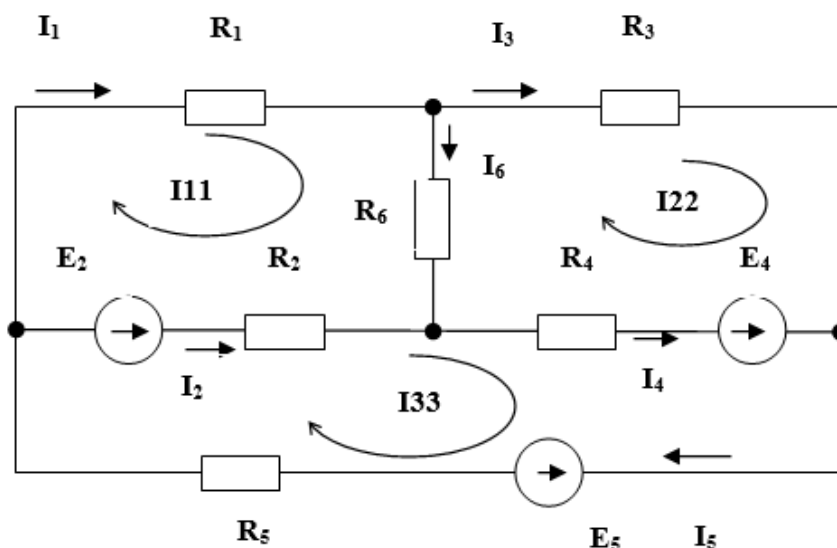


Рисунок 1.10 – Схема к примеру расчёта методом контурных токов

Сначала выбираются и проставляются на схеме стрелками положительные направления токов в ветвях и направление контурных токов I_{11} , I_{22} и I_{33} (дуговыми стрелками), а затем составляются уравнения для контурных токов. Структура записи этих уравнений следующая. Если контурные токи направить в одном направлении, то для контура в левой части уравнения записывается произведение контурного тока на сумму сопротивлений резисторов этого контура со знаком «плюс» и произведения соседних контурных токов на смежные сопротивления между этими контурами со знаком «минус». В правой части уравнения записывается алгебраическая сумма э.д.с., действующих в рассматриваемом контуре. Со знаком «плюс» записываются э.д.с., направление действия которых совпадает с выбранным направлением контурного тока. Если э.д.с. направлена противоположно контурному току, то ее записывают со знаком «минус».

На примере схемы (рисунок 1.10) запись уравнений выглядит следующим образом:

$$I_{11} * (R_1 + R_6 + R_2) - I_{22} * R_6 - I_{33} * R_2 = -E_2,$$

$$I_{22} * (R_3 + R_6 + R_4) - I_{11} * R_6 - I_{33} * R_4 = -E_4,$$

$$I_{33} * (R_2 + R_4 + R_5) - I_{22} * R_4 - I_{11} * R_2 = E_2 + E_4 - E_5.$$

После нахождения контурных токов применяем принцип наложения, согласно которому ток, протекающий по данной ветви, является результатом наложения контурных токов, циркулирующих по данному участку цепи. При этом следует учесть, что если направление контурного тока совпадает с направлением рассчитываемого тока, то данный контурный ток в равенстве записывается со знаком плюс, в противном случае – со знаком минус.

$$I_1 = I_{11}; I_3 = I_{22}; I_5 = I_{33};$$

$$I_2 = I_{33} - I_{11};$$

$$I_4 = I_{33} - I_{22};$$

$$I_6 = I_{11} - I_{22}.$$

1.3.3 Метод узловых напряжений

Этот метод также позволяет сократить число расчетных уравнений по сравнению с методом непосредственного применения законов Кирхгофа. В этом методе в качестве вспомогательных неизвестных вводят узловые напряжения, т. е. напряжения между узлами схемы и одним из них, называемым опорным, потенциал которого принимают за нуль. Система уравнений электрического равновесия цепи составляется не относительно неизвестных токов в ветвях, а для узловых напряжений, после нахождения которых токи в ветвях определяются из простых соотношений. Количество расчетных уравнений в системе на единицу меньше числа узлов схемы. Рассмотрим расчет токов методом узловых напряжений (потенциалов) на примере схемы рисунка 1.11.

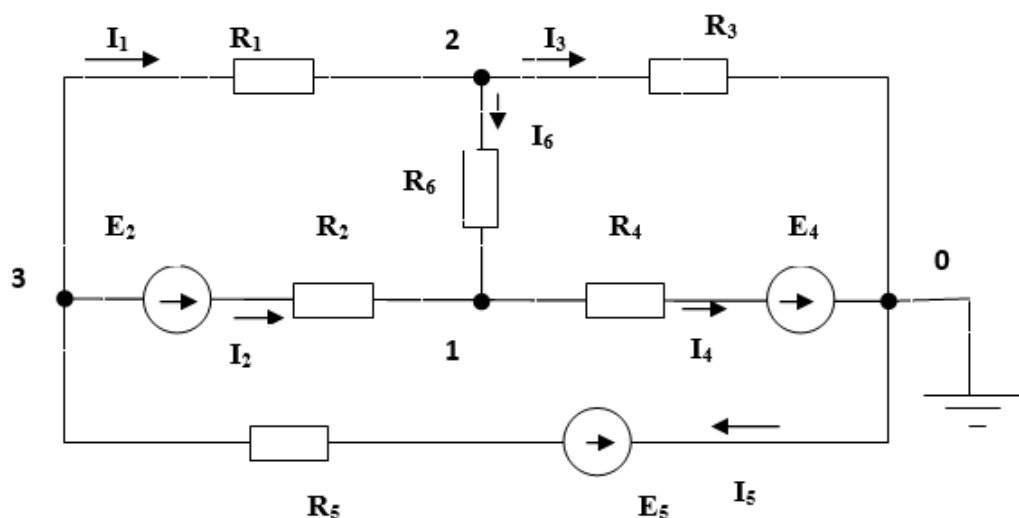


Рисунок 1.11 – Схема к примеру расчёта методом узловых напряжений (потенциалов)

В схеме, приведённой на рисунке 1.11, в качестве опорного узла принят узел 0. В данной схеме содержится 4 узла, таким образом необходимо составить уравнения для узлов 1, 2, 3. Для составления уравнения по методу узловых потенциалов необходимо действовать по следующему алгоритму.

1. Первое слагаемое содержит потенциал данного узла, умноженного на сумму проводимостей ветвей, сходящихся к данному узлу. Например, для узла 1:

$$\varphi_1 * \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} \right).$$

2. Последующие слагаемые левой части имеют отрицательный знак и представляют собой произведение потенциалов соседних узлов, умноженных на проводимость ветви, отделяющих данный узел от целевого узла (для которого пишется уравнение). Например, для узла 1: $-\varphi_2 * \frac{1}{R_6} - \varphi_3 * \frac{1}{R_2}$.

3. Таким образом для узла 1 левая часть равенства имеет вид:

$$\varphi_1 * \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} \right) - \varphi_2 * \frac{1}{R_6} - \varphi_3 * \frac{1}{R_2}.$$

4. Правая часть равенства состоит из слагаемых содержащих произведение ЭДС источника, находящегося в ветви, прилегающей к целевому узлу, умноженной на проводимость данной ветви. Необходимо

учитывать, что слагаемое имеет знак плюс, если ЭДС источника направлена в узел и знак минус в противоположном случае. Пример узла 1: $E_2 * \frac{1}{R_2} - E_4 * \frac{1}{R_4}$.

5. Таким образом уравнение для узла 1 имеет вид:

$$\varphi_1 * \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} \right) - \varphi_2 * \frac{1}{R_6} - \varphi_3 * \frac{1}{R_2} = E_2 * \frac{1}{R_2} - E_4 * \frac{1}{R_4}.$$

Уравнения для узлов 2 и 3 имеет вид:

узел 2

$$\varphi_2 * \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6} \right) - \varphi_1 * \frac{1}{R_6} - \varphi_3 * \frac{1}{R_1} = 0;$$

узел 3

$$\varphi_3 * \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} \right) - \varphi_2 * \frac{1}{R_1} - \varphi_1 * \frac{1}{R_2} = -E_2 * \frac{1}{R_2}.$$

Решая полученную систему уравнений, находим потенциалы узлов. Поиск токов по известным потенциалам осуществляется по закону Ома для участка цепи, содержащего источник ЭДС.

Изучим особенности написания данного уравнения на примере тока I_2 :

$$I_2 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1 + E_2}{R_2}.$$

В числителе присутствует разность потенциалов, при этом из большего потенциала (откуда течёт ток) вычитается меньший потенциал (куда течёт ток). Второе слагаемое содержит ЭДС источника, включённого в эту ветвь, данное слагаемое пишется с плюсом, если направление ЭДС источника совпадает с направлением тока, в противном случае ставится знак минус. Знаменатель данного выражения содержит общее сопротивление ветви.

Выражения для остальных токов имеют вид:

$$I_1 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{R_1};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{R_3};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_1 - \varphi_0 + E_4}{R_4};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_0 - \varphi_3 - E_5}{R_5};$$

$$I_6 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_6}.$$

1.3.4 Метод наложения

Метод наложения основан на принципе наложения, который заключается в том, что ток в любой ветви линейной электрической цепи равен алгебраической сумме частичных токов, создаваемых в этой ветви каждой из ЭДС в отдельности.

Рекомендуемая последовательность расчёта цепи с применением принципа наложения:

- 1) поочерёдно рассчитывают частичные токи, возникающие от действия каждого источника, удаляя остальные из схемы, но оставляя при этом их внутренние сопротивления;
- 2) определяют токи в ветвях путём алгебраического сложения частичных токов.

Пример: Определить токи в ветвях цепи, приведённой на рисунке 1.12, а пользуясь методом наложения, если $R_1 = 5 \text{ Ом}$; $R_2 = 5 \text{ Ом}$; $R_3 = 10 \text{ Ом}$; $E_1 = 10 \text{ В}$; $E_2 = 10 \text{ В}$.

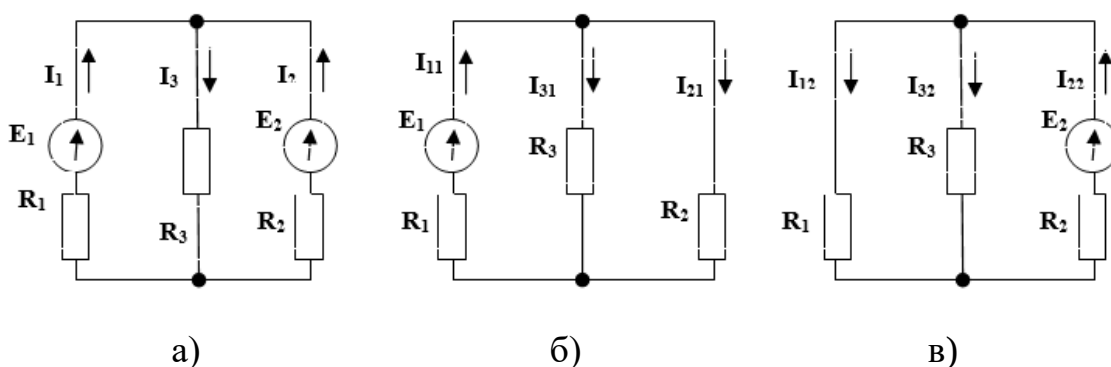


Рисунок 1.12 – Схема к примеру расчёта методом наложения

Для определения токов в ветвях схемы (рисунок 1.12, а), необходимо рассчитать частичные токи в ветвях схем (рисунок 1.12, б, в).

Расчёт токов схемы (рисунок 1.12, б):

Расчёт общего сопротивления цепи.

$$R_{1 \text{ общ}} = R_1 + \frac{R_2 * R_3}{R_2 + R_3} = 8,33 \text{ Ом.}$$

Расчёт тока I_{11} .

$$I_{11} = \frac{E_1}{R_{1 \text{ общ}}} = 1,2 \text{ А.}$$

Расчёт тока I_{31} .

$$I_{31} = \frac{I_{11} * R_2}{R_2 + R_3} = 0,4 \text{ А.}$$

Расчёт тока I_{21} .

$$I_{21} = \frac{I_{11} * R_3}{R_2 + R_3} = 0,8 \text{ А.}$$

Расчёт токов схемы (рисунок 1.12, в) осуществляется по аналогии:

$$R_{2 \text{ общ}} = R_2 + \frac{R_1 * R_3}{R_1 + R_3} = 8,33 \text{ Ом;}$$

$$I_{22} = \frac{E_2}{R_{2 \text{ общ}}} = 1,2 \text{ А;}$$

$$I_{32} = \frac{I_{22} * R_1}{R_1 + R_3} = 0,4 \text{ А;}$$

$$I_{12} = \frac{I_{22} * R_3}{R_1 + R_3} = 0,8 \text{ А.}$$

По известным частичным токам рассчитываем токи схемы (рисунок 1.12, а) используя принцип наложения:

$$I_1 = I_{11} - I_{12} = 0,4 \text{ А;}$$

$$I_2 = I_{22} - I_{21} = 0,4 \text{ А;}$$

$$I_3 = I_{31} + I_{32} = 0,8 \text{ А.}$$

При расстановке знаков руководствуются принципом: если направление частичного тока совпадает с направлением вычисляемого тока, то частичный ток пишется с плюсом, в противном случае с минусом.

1.3.5 Метод эквивалентного генератора

Метод эквивалентного генератора применяется для определения тока в одной ветви. Сущность его заключается в том, что всю цепь, за исключением

сопротивления исследуемой ветви, заменяются одним источником – эквивалентным генератором с ЭДС $E_{\text{ЭКВ}}$ и внутренним сопротивлением $r_{\text{ЭКВ}}$.

Расчёт методом эквивалентного генератора состоит в следующем:

- 1) находят напряжение на зажимах разомкнутой ветви ab ($E_{\text{ЭКВ}}$);
- 2) определяют входное сопротивление входной цепи ($r_{\text{ЭКВ}}$) по отношению к зажимам ab , принимая ЭДС источников равным нулю;
- 3) определяют ток по формуле (1.18):

$$I = \frac{E_{\text{ЭКВ}}}{r_{\text{ЭКВ}} + R_{ab}}. \quad (1.18)$$

При $R_{ab}=0$ в цепи будет короткое замыкание. Из формулы (1.18):

$$I_{\text{КЗ}} = \frac{E_{\text{ЭКВ}}}{r_{\text{ЭКВ}}}. \quad (1.19)$$

Отсюда определяем входное сопротивление:

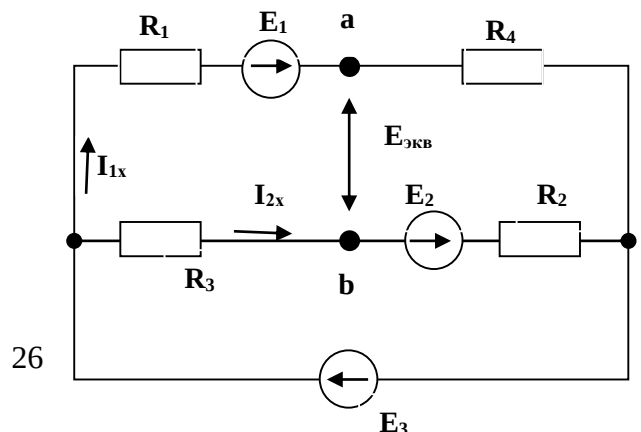
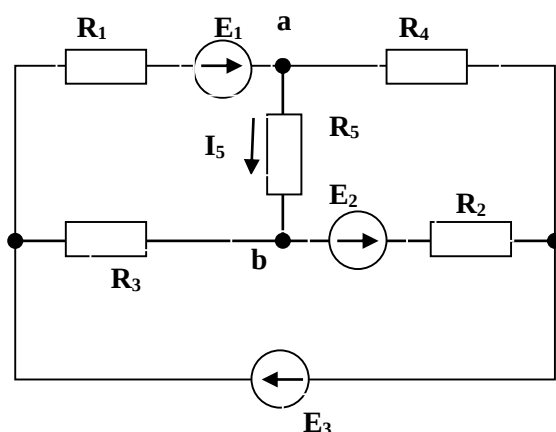
$$r_{\text{ЭКВ}} = \frac{E_{\text{ЭКВ}}}{I_{\text{КЗ}}}. \quad (1.20)$$

Используя (1.20), легко определить входное сопротивление. Для этого необходимо измерить напряжение холостого хода на зажимах разомкнутой ветви $E_{\text{ЭКВ}}$ и ток короткого замыкания $I_{\text{КЗ}}$ ветви, затем найти $r_{\text{ЭКВ}}$ по закону Ома.

Пример. Определить ток I_5 методом эквивалентного генератора (рисунок 1.13, а), если $E_1 = 50$ В; $E_2 = 80$ В; $E_3 = 100$ В; $R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 20$ Ом; $R_3 = 40$ Ом; $R_4 = 20$ Ом; $R_5 = 20$ Ом.

Решение:

1. Разрываем ветвь, в которой требуется определить ток, и рассчитываем напряжение между точками ab (напряжение холостого хода $E_{\text{ЭКВ}}$). Полученная схема приведена на рисунке 1.13, б.



а)

б)

Рисунок 1.13 – Схема к примеру расчёта методом эквивалентного генератора

По второму правилу Кирхгофа:

$$E_3 + E_1 = I_{1x} * (R_4 + R_1);$$

$$E_3 + E_2 = I_{2x} * (R_3 + R_2).$$

Отсюда находим токи:

$$I_{1x} = \frac{E_3 + E_1}{R_4 + R_1} = 5 \text{ A};$$

$$I_{2x} = \frac{E_3 + E_2}{R_3 + R_2} = 3 \text{ A}.$$

Напряжение холостого хода:

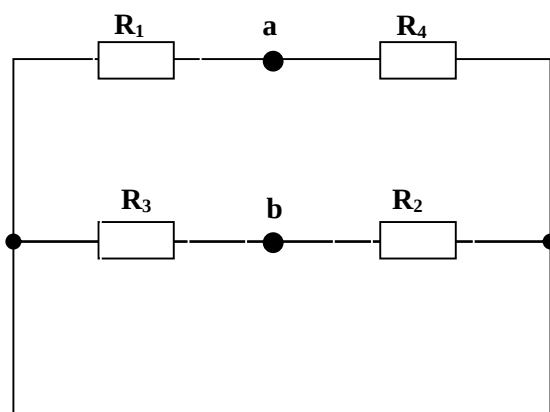
$$E_{\text{экв}} = U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = E_1 - I_{1x} * R_1 + I_{2x} * R_2 = 120 \text{ В}.$$

2. Замыкаем все ЭДС (рисунок 1.14) и определяем входное сопротивление:

$$R_{\text{экв}} = R_{\text{вх}} = \frac{R_1 * R_4}{R_1 + R_4} + \frac{R_2 * R_3}{R_2 + R_3} = 20 \text{ Ом}.$$

Рассчитываем ток:

$$I_5 = \frac{E_{\text{экв}}}{r_{\text{экв}} + R_5} = 3 \text{ A}.$$



1.3.6 Энергетический баланс в электрической цепи

Из закона сохранения энергии следует, что мощность источников энергии в любой момент времени равна сумме мощностей всех участков цепи:

$$\sum E * I = \sum I^2 * R. \quad (1.21)$$

Это соотношение носит название уравнения энергетического баланса.

Мощность $E * I > 0$, если источник работает в режиме генератора, т. е. когда E и I совпадают по направлению. Мощность $E * I < 0$, если источник работает в режиме потребителя, то есть когда E и I не совпадают по направлению. Для цепи, показанной на рисунке 1.12, а, уравнение энергетического баланса имеет вид:

$$E_1 * I_1 + E_2 * I_2 = I_1^2 * R_1 + I_2^2 * R_2 + I_3^2 * R_3. \quad (1.22)$$

Уравнение энергетического баланса, обычно составляют после расчёта цепи для проверки правильности. Для этого по известным величинам токов и ЭДС источников рассчитывают левую часть равенства (1.22), а по известным токам и сопротивлениям элементов – правую. Если в результате проведённых вычислений получается тождество, то расчёт цепи выполнен верно.

1.4 Пример расчёта линейной цепи постоянного тока

Для схемы, приведённой на рисунке 1.15:

- 1) составить уравнения по правилам Кирхгофа;
- 2) произвести расчёт методом контурных токов;
- 3) проверить правильность расчётов по правилам Кирхгофа;
- 4) проверить правильность проведённых расчётов путём составления уравнения энергетического баланса;
- 5) рассчитать величину тока I_6 методом эквивалентного генератора.

$R_1 = 16 \text{ Ом};$
 $R_2 = 10 \text{ Ом};$
 $R_3 = 20 \text{ Ом};$
 $R_4 = 6 \text{ Ом};$
 $R_5 = 18 \text{ Ом};$
 $R_6 = 22 \text{ Ом};$
 $E_1 = 80 \text{ В};$
 $E_2 = 100 \text{ В};$
 $E_3 = 60 \text{ В};$
 $E_5 = 90 \text{ В}.$

$I_1 \dots I_6 - ?$

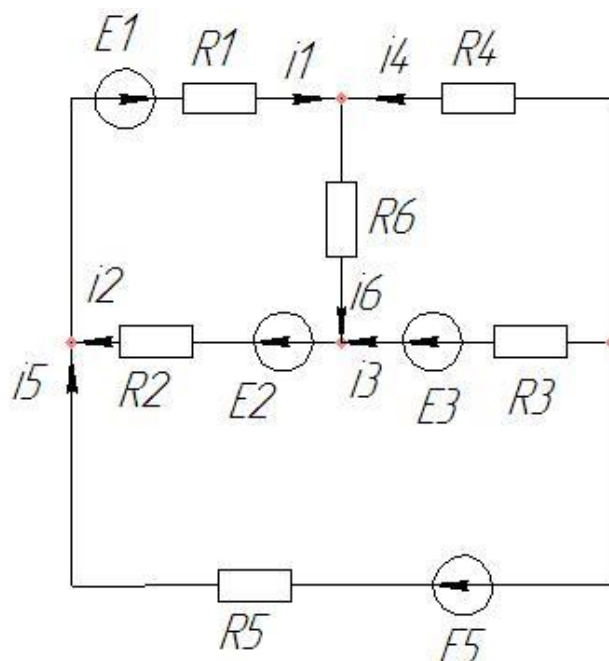


Рисунок 1.15 – Схема к примеру расчёта линейной цепи постоянного тока

По закону Кирхгофа

Выберем произвольно направления обхода контура (например, по часовой стрелке), укажем произвольные положительные направления токов в ветвях.

Составим на основании законов Кирхгофа систему уравнений для расчета токов во всех ветвях схемы:

$$I_1 + I_4 - I_6 = 0;$$

$$-I_1 + I_2 + I_5 = 0;$$

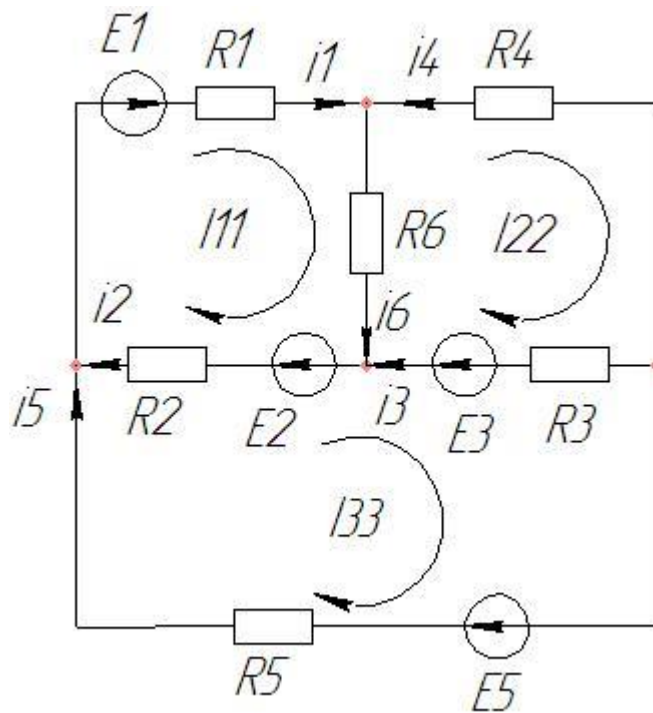
$$-I_2 + I_3 + I_6 = 0;$$

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_6 R_6 = E_1 + E_2;$$

$$I_3 R_3 - I_4 R_4 - I_6 R_6 = E_3;$$

$$-I_2 R_2 - I_3 R_3 + I_5 R_5 = -E_2 - E_3 + E_5.$$

Методом контурных токов



Примем положительные направления контурных токов I_{11}, I_{22}, I_{33} . Число уравнений равно числу независимых контуров. Получим систему уравнений:

$$I_{11} \cdot (R_1 + R_2 + R_6) - I_{22}R_6 - I_{33}R_2 = E_1 + E_2;$$

$$I_{22} \cdot (R_3 + R_4 + R_6) - I_{11}R_6 - I_{33}R_3 = E_3;$$

$$I_{33} \cdot (R_2 + R_3 + R_5) - I_{11}R_2 - I_{22}R_3 = -E_2 - E_3 + E_5.$$

$$48I_{11} - 22I_{22} - 10I_{33} = 180;$$

$$48I_{22} - 22I_{11} - 20I_{33} = 60;$$

$$48I_{33} - 10I_{11} - 20I_{22} = -70.$$

Решим систему в математическом пакете MatCAD. Получим

$$I_{11} = 6,482 \text{ A};$$

$$I_{22} = 5,054 \text{ A};$$

$$I_{33} = 1,998 \text{ A}.$$

Определим значение токов в ветвях:

$$I_1 = I_{11} = 6,482 \text{ A};$$

$$I_2 = I_{11} - I_{33} = 4,484 \text{ A};$$

$$I_3 = I_{22} - I_{33} = 3,056 \text{ A};$$

$$I_4 = -I_{22} = -5,054 \text{ A};$$

$$I_5 = I_{33} = 1,998 \text{ A};$$

$$I_6 = I_{11} - I_{22} = 1,428 \text{ A}.$$

Проверим правильность решения по второму закону Кирхгофа:

$$I_1 + I_4 - I_6 = 0;$$

$$-I_1 + I_2 + I_5 = 0;$$

$$-I_2 + I_3 + I_6 = 0;$$

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_6 R_6 = E_1 + E_2;$$

$$I_3 R_3 - I_4 R_4 - I_6 R_6 = E_3;$$

$$-I_2 R_2 - I_3 R_3 + I_5 R_5 = -E_2 - E_3 + E_5.$$

$$I_1 + I_4 - I_6 = 0;$$

$$-I_1 + I_2 + I_5 = 0;$$

$$-I_2 + I_3 + I_6 = 0;$$

$$16I_1 + 10I_2 + 22I_6 = 180;$$

$$20I_3 - 6I_4 - 22I_6 = 60;$$

$$-10I_2 - 20I_3 + 18I_5 = -70.$$

Решим систему в математическом пакете MatCAD. Получим значения

ТОКОВ:

$$I_1 = 6,482 \text{ A};$$

$$I_2 = 4,485 \text{ A};$$

$$I_3 = 3,056 \text{ A};$$

$$I_4 = -5,054 \text{ A};$$

$$I_5 = 1,998 \text{ A};$$

$$I_6 = 1,429 \text{ A}.$$

Баланс мощностей

Уравнение баланса мощностей:

$$I_1 E_1 + I_2 E_2 + I_3 E_3 + I_4 E_4 + I_5 E_5 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6.$$

Выделяемая мощность:

$$P_1 = I_1 E_1 + I_2 E_2 + I_3 E_3 + I_5 E_5 = 1330,14 \text{ Вт.}$$

Поглощаемая мощность:

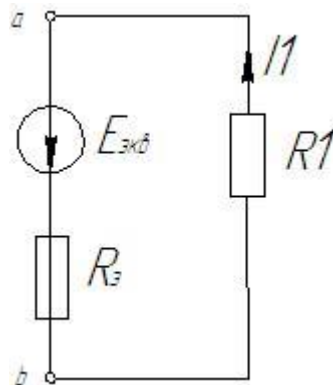
$$P_2 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 = 1330,08 \text{ Вт.}$$

Условие баланса мощностей выполняется:

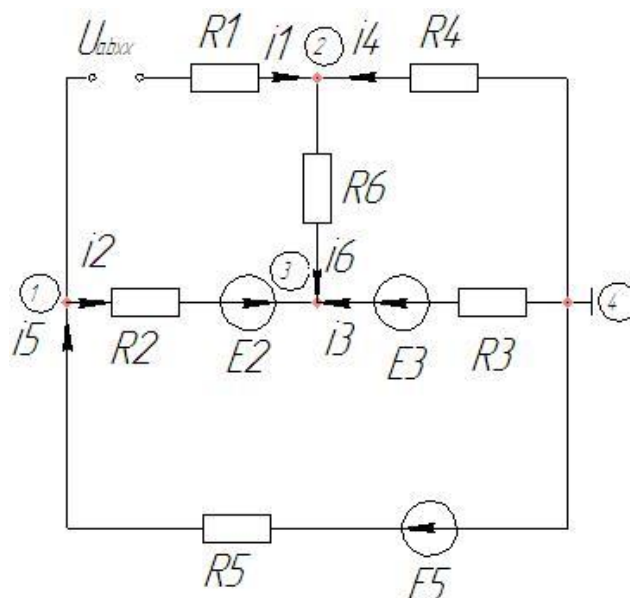
$$P_1 = P_2.$$

Метод эквивалентного генератора

Выделим участок схемы с сопротивлением R_2 , остальную часть представим в виде активного двухполюсника.



Расчетная схема для определения напряжения холостого хода приобретает вид:



Произведем расчет методом узловых потенциалов. Заземилим 4-ый узел:

$$\begin{aligned}g_{11}\varphi_1 - g_{12}\varphi_2 - g_{13}\varphi_3 &= J_1; \\-g_{21}\varphi_1 + g_{22}\varphi_2 - g_{23}\varphi_3 &= J_2; \\-g_{31}\varphi_1 - g_{32}\varphi_2 + g_{33}\varphi_3 &= J_3.\end{aligned}$$

Найдем собственные проводимости:

$$\begin{aligned}g_{11} &= \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} = 0,156 \text{ Ом}^{-1}; \\g_{22} &= \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} = 0,212 \text{ Ом}^{-1}; \\g_{33} &= \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6} = 0,195 \text{ Ом}^{-1}.\end{aligned}$$

Найдём общие проводимости:

$$\begin{aligned}g_{12} &= g_{21} = 0 \text{ Ом}^{-1}; \\g_{13} &= g_{31} = \frac{1}{R_2} = 0,1 \text{ Ом}^{-1}; \\g_{23} &= g_{32} = \frac{1}{R_6} = 0,045 \text{ Ом}^{-1}.\end{aligned}$$

Найдём токи:

$$\begin{aligned}J_1 &= -\frac{E_2}{R_2} + \frac{E_5}{R_5} = -5 \text{ A}; \\J_2 &= 0 \text{ A}; \\J_3 &= \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3} = 13 \text{ A}.\end{aligned}$$

Подставляем в систему уравнений:

$$\begin{aligned}0,156\varphi_1 - 0\varphi_2 - 0,1\varphi_3 &= -5; \\-0\varphi_1 + 0,212\varphi_2 - 0,045\varphi_3 &= 0; \\-0,1\varphi_1 - 0,045\varphi_2 + 0,195\varphi_3 &= 13.\end{aligned}$$

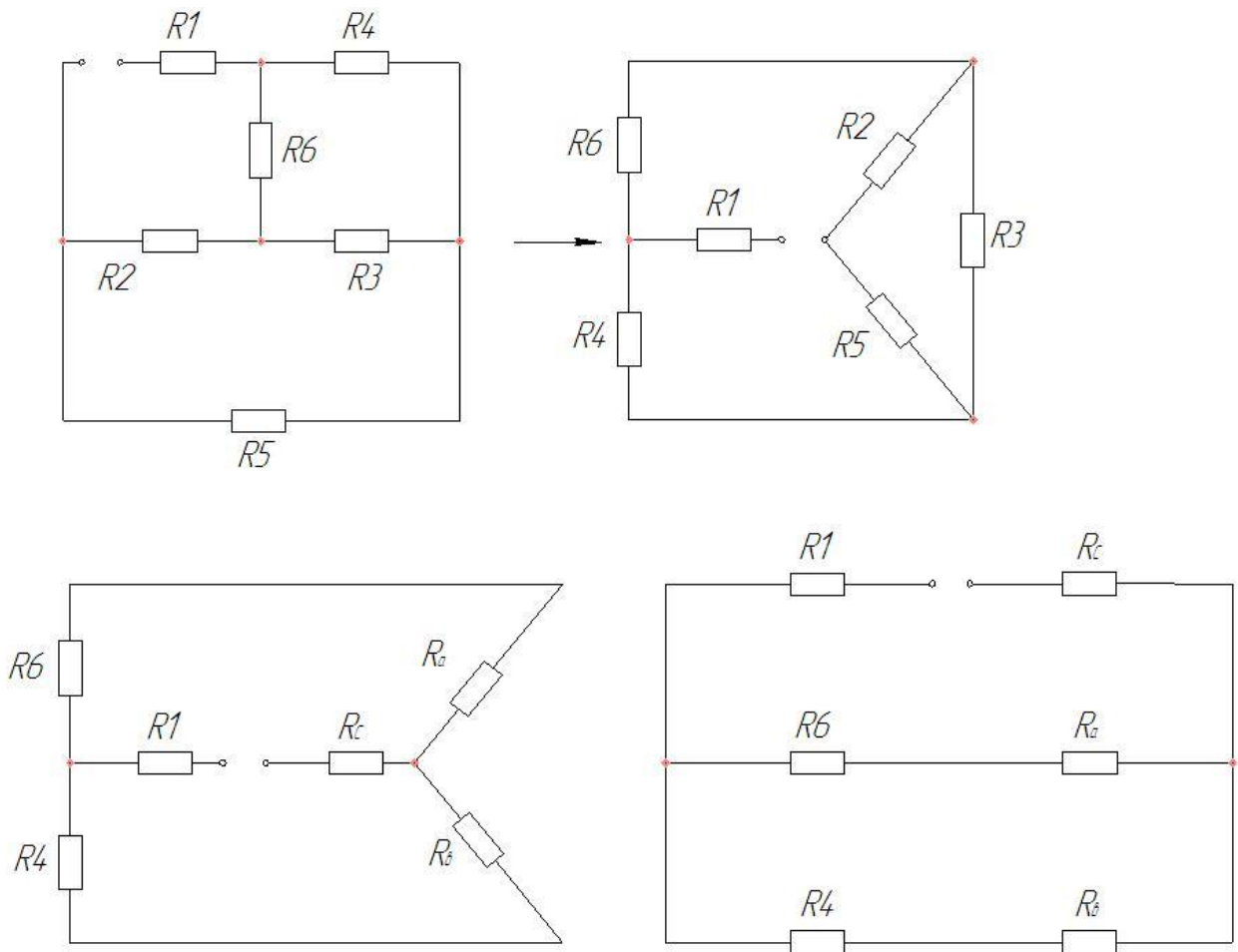
Решая в пакете MathCAD, получим:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 80,719 \text{ В}; \\\varphi_2 &= 25,029 \text{ В}; \\\varphi_3 &= 19,692 \text{ В}.\end{aligned}$$

Найдём напряжение холостого хода:

$$U_{xx} = \varphi_2 + \varphi_1 + E_1 = 185,748 \text{ В.}$$

Входное сопротивление двухполюсника рассчитаем по схеме:



Приведем преобразование из треугольника в звезду:

$$R_a = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3 + R_5} = 4,167 \text{ Ом;}$$

$$R_b = \frac{R_3 \cdot R_5}{R_2 + R_3 + R_5} = 7,5 \text{ Ом;}$$

$$R_c = \frac{R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_3 + R_5} = 3,75 \text{ Ом;}$$

Тогда входное сопротивление активного двухполюсника:

$$R_{\text{вх}} = \frac{(R_a + R_6) \cdot (R_b + R_4)}{(R_a + R_6) + (R_b + R_4)} + R_c = 12,656 \text{ Ом.}$$

Вычислим ток I_1 через входное сопротивление:

$$I_1 = \frac{E_3}{R_1 + R_3} = 6,482 \text{ A.}$$

ГЛАВА 2 ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ОДНОФАЗНОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

2.1 Общие сведения

В современной электроэнергетике используют в основном переменный синусоидальный ток. В настоящее время почти вся электрическая энергия вырабатывается в виде энергии переменного тока. Основными преимуществами переменного тока по сравнению с постоянным являются возможность более простого преобразования напряжения и передачи энергии с минимальными потерями. Кроме того, генераторы и двигатели переменного тока имеют более простое устройство, надёжнее в работе и проще в эксплуатации по сравнению с машинами постоянного тока.

Синусоидальный ток – это периодический ток, изменяющийся во времени по закону синуса (рисунок 2.1).

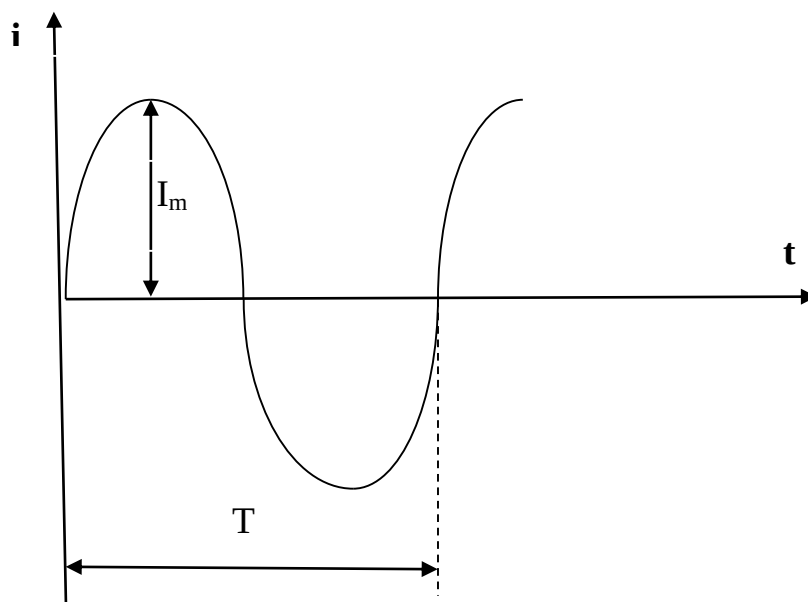


Рисунок 2.1 – График зависимости мгновенного значения синусоидального тока от времени

Функция зависимости мгновенного значения тока от времени имеет вид:

$$i = I_m * \sin(\omega * t + \varphi_0), \quad (2.1)$$

где i – мгновенное значение тока; I_m – максимальное (амплитудное) значение тока; ω – угловая частота; φ_0 – начальная фаза.

Аргумент синуса ($\omega * t + \varphi_0$) называется фазой. Периодом (T) называют интервал времени за который ток совершает одно полное колебание.

Угловая частота с периодом связана соотношением:

$$\omega = \frac{2 * \pi}{T}. \quad (2.2)$$

Кроме данных параметров синусоидальный ток характеризуется частотой:

$$f = \frac{1}{T}. \quad (2.3)$$

Аналогично от времени зависит мгновенное значение напряжения:

$$u = U_m * \sin(\omega * t + \varphi_0). \quad (2.4)$$

2.2 Действующее значение синусоидального тока

Мгновенное значение синусоидального тока изменяется с течением времени от нуля до максимального значения, поэтому использовать в расчётах электрических цепей такую величину неудобно. Амплитудное значение тоже использовать не практично, потому что сложно создать прибор, измеряющий амплитудное значение тока. Удобнее использовать для характеристики переменного тока какое-нибудь его свойство, не зависящее от его направления. Таким свойством, например, является способность тока нагревать проводник, по которому он протекает. Представим переменный ток, проходящий по некоторому проводнику сопротивлением R . В течение периода ток выделяет в проводнике определённое количество тепловой энергии:

$$W = \int_0^T i^2 * R * dt. \quad (2.5)$$

Пропустим через тот же проводник постоянный ток, подобрав его таким, чтобы он выделил в том же проводнике за это же время такое же количество тепловой энергии:

$$W = I^2 * R * T. \quad (2.6)$$

По тепловому действию оба тока равнозначны. Такое значение переменного тока называют действующим значением.

Приравняв (2.5) и (2.6), найдём действующее значение синусоидального тока:

$$I^2 * R * T = \int_0^T i^2 * R * dt;$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} * \int_0^T i^2 * dt}. \quad (2.7)$$

Таким образом, действующее значение синусоидального тока определяется как среднее квадратичное за период. Установим связь между действующим током I и амплитудой I_m синусоидального тока:

$$I^2 = \frac{1}{T} * \int_0^T i^2 * dt = \frac{I_m^2}{T} * \int_0^T \sin^2(\omega * t + \varphi_0) * dt = \frac{I_m^2}{2}.$$

Следовательно:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (2.8)$$

Действующее значение синусоидального тока меньше его амплитуды в $\sqrt{2}$ раз. Аналогично определяется действующее значение синусоидального напряжения:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} * \int_0^T u^2 * dt};$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \quad (2.9)$$

Номинальные токи и напряжения электротехнических устройств определяются, как правило, по их действующим значениям. Приборы электромагнитной, электродинамической и других систем показывают именно действующие значения токов и напряжений.

2.3 Векторная диаграмма

Графически синусоидальный ток удобно интерпретировать графически в виде вектора, вращающегося в декартовой системе координат (рисунок 2.2).

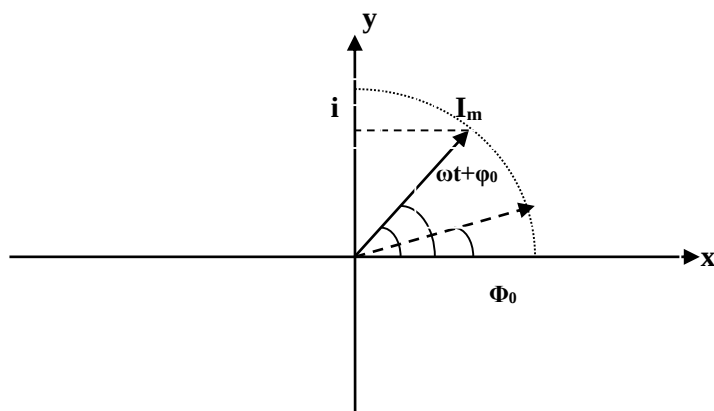


Рисунок 2.2 – Векторная диаграмма синусоидального тока

При этом длина вектора равна амплитудному значению тока I_m , фаза тока $(\omega t + \varphi_0)$ равна углу между вектором и осью x . Проекция вектора на ось y , как видно из рисунка 2.1, равна мгновенному значению тока i . Удобство векторных диаграмм заключается в том, что все вектора токов и напряжений электрической цепи синусоидального тока вращаются с одинаковой угловой скоростью, поэтому их взаимное расположение друг относительно друга с течением времени не изменяется. Поэтому векторные диаграммы токов и напряжений широко используются при анализе работы таких цепей.

2.4 Резистор в цепи синусоидального тока

Если синусоидальное напряжение $u = U_m * \sin(\omega * t + \varphi_0)$ подключить к резистору сопротивлением R , то через него будет протекать синусоидальный ток:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} * \sin(\omega * t + \varphi_0) = I_m * \sin(\omega * t + \varphi_0). \quad (2.10)$$

Следовательно, напряжение на резисторе и ток, проходящий через резистор, имеют начальную фазу, или совпадают по фазе – они одновременно

достигают своих амплитудных значений и соответственно одновременно проходят через ноль (рисунок 2.3).

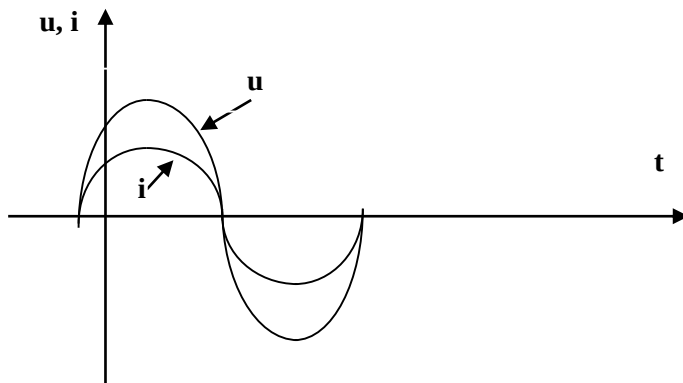


Рисунок 2.3 – Зависимость мгновенных значений напряжения и тока, протекающего через резистор

Векторная диаграмма напряжения и тока приведена на рисунке 2.4.

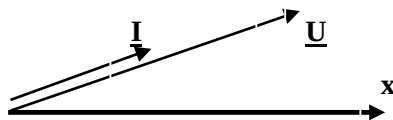


Рисунок 2.4 – Векторная диаграмма тока и напряжения на резисторе

Амплитуда и действующее значение тока и напряжения связаны соотношением:

$$I_m = \frac{U_m}{R}; I = \frac{U}{R}. \quad (2.11)$$

Среднее значение мгновенной мощности за период называется активной мощностью и измеряется в ваттах. В данном случае активная мощность:

$$P = U * I = I^2 * R. \quad (2.12)$$

2.5 Катушка индуктивности в цепи синусоидального тока

Индуктивная катушка как элемент схемы замещения реальной цепи синусоидального тока даёт возможность учитывать при расчёте явление самоиндукции и накопление энергии в её магнитном поле.

Пусть в цепи переменного тока включена индуктивная катушка с бесконечно малым сопротивлением провода. Непрерывное изменение во времени тока вызывает появление в витках катушки ЭДС самоиндукции. В соответствии с правилом Ленца эта ЭДС противодействует всяким изменениям тока.

Допустим, ток через катушку изменяется по закону:

$$i = I_m * \sin \omega * t. \quad (2.13)$$

В этом случае ЭДС самоиндукции:

$$e_L = -L * \frac{di}{dt} = -\omega * L * I_m * \sin(\omega * t + 90^0). \quad (2.14)$$

Поэтому напряжение на катушке:

$$u_L = -e_L = \omega * L * I_m * \sin(\omega * t + 90^0) = U_m * \sin(\omega * t + 90^0). \quad (2.15)$$

Сравнивая формулы (2.13) и (2.15), можно сделать вывод о том, что напряжение опережает ток на угол 90^0 или ток отстает от напряжения по фазе на угол 90^0 (рисунок 2.5). Угол сдвига фаз в этом случае положительный:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 90^0.$$

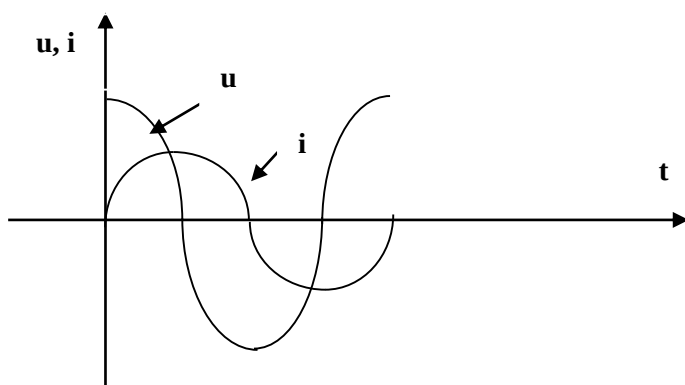


Рисунок 2.5 – Зависимость мгновенных значений напряжения и тока протекающего через катушку индуктивности

Векторная диаграмма напряжения и тока приведена на рисунке 2.6.

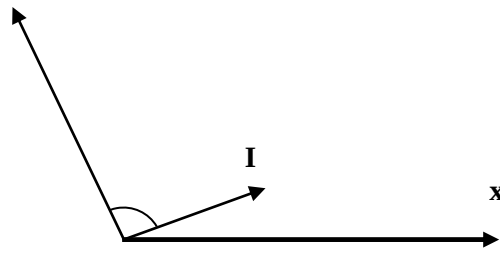


Рисунок 2.6 – Векторная диаграмма тока и напряжения в катушке индуктивности

Величина $X_L = \omega * L$ – это индуктивное сопротивление, имеющее размерность Ом. Оно зависит от частоты и представляет собой параметр катушки, с помощью которого учитывают явление самоиндукции. Из анализа (2.15) видно, что амплитуда напряжения и тока связаны законом Ома:

$$U_m = \omega * L * I_m = I_m * X_L. \quad (2.16)$$

Аналогично связаны действующие значения напряжения и тока:

$$U = \omega * L * I = I * X_L. \quad (2.17)$$

Мгновенная мощность цепи с катушкой:

$$\begin{aligned} p = u * i &= U_m * \sin(\omega * t + 90^\circ) * I_m * \sin \omega * t = \\ &= U * I * \sin 2 * \omega * t. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Амплитуду колебания мгновенной мощности в цепи с катушкой называют реактивной (индуктивной) мощностью:

$$Q_L = U * I = I^2 * X_L. \quad (2.19)$$

Реактивную мощность измеряют в Вар (вольт-ампер реактивный).

2.6 Конденсатор в цепи синусоидального тока

Включение конденсатора в цепь переменного тока не вызывает разрыва цепи, т. к. ток в цепи всё время поддерживается за счёт заряда и разряда конденсатора. Пусть напряжение изменяется по синусоидальному закону:

$$u = U_m * \sin \omega * t. \quad (2.20)$$

Тогда

$$i = \frac{dq}{dt} = C * \frac{du}{dt} = \omega * C * U_m * \sin(\omega * t + 90^\circ) = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega * C}} * \sin(\omega * t + 90^\circ). \quad (2.21)$$

Формула (2.21) показывает, что ток опережает приложенное напряжение на угол 90° (рисунок 2.7).

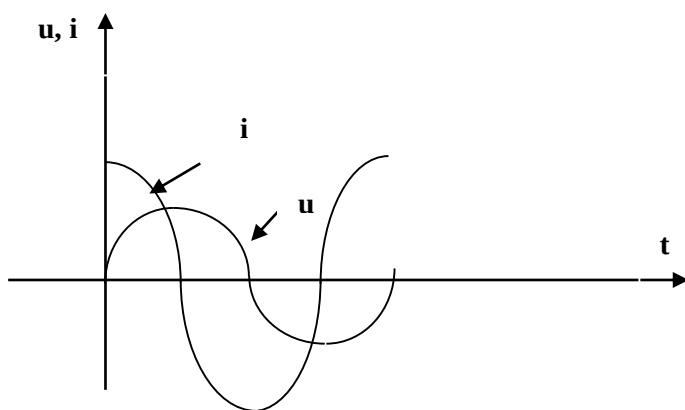


Рисунок 2.7 – Зависимость мгновенных значений напряжения и тока, протекающего через конденсатор

Векторная диаграмма напряжения и тока приведена на рисунке 2.8.

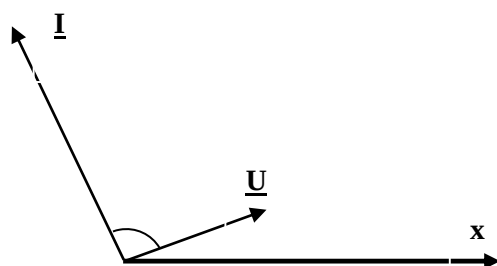


Рисунок 2.8 – Векторная диаграмма тока и напряжения в конденсаторе

Из (2.21) видно, что амплитуда тока и напряжения связаны законом Ома:

$$I_m = \omega * C * U_m = \frac{U_m}{X_c}, \quad (2.22)$$

$$X_c = \frac{1}{\omega * C}, \quad (2.23)$$

где X_c – ёмкостное сопротивление, Ом.

Мгновенная мощность, поступающая в конденсатор:

$$\begin{aligned}
 p &= u * i = I_m * \sin(\omega * t + 90^0) * U_m * \sin \omega * t = \\
 &= U * I * \sin 2 * \omega * t.
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

Амплитуду колебания мгновенной мощности в цепи с конденсатором называют реактивной (ёмкостной) мощностью и измеряется в Вар:

$$Q_C = U * I = I^2 * X_C. \tag{2.25}$$

2.7 Цепь, содержащая резистор и индуктивную катушку

Реальная катушка в цепи синусоидального тока представляет сочетание активного и индуктивного сопротивления. Схема замещения катушки представлена на рисунке 2.9.

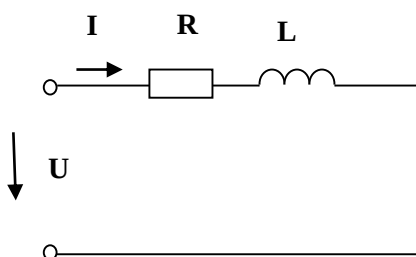


Рисунок 2.9 – Схема замещения реальной катушки

Для действующих значений напряжений второй закон Кирхгофа записывается в векторной форме:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L. \tag{2.26}$$

Графически данное равенство может быть реализовано в виде векторной диаграммы (рисунок 2.10).

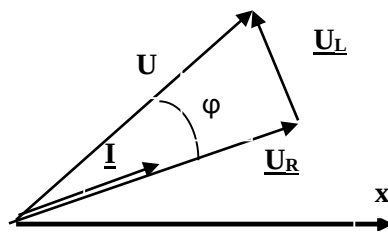


Рисунок 2.10 – Векторная диаграмма тока и напряжения в схеме замещения катушки

При построении векторной диаграммы было учтено, что вектор напряжения на резисторе (U_R) по фазе совпадает по фазе с протекающим током (I). Вектор напряжения на катушке (U_L) по фазе опережает ток на угол 90° . Напряжение источника (U) представляет собой векторную сумму векторов напряжения на катушке и напряжения на резисторе. Данную сумму находим по правилу сложения векторов треугольником. В качестве базисного вектора выбираем вектор тока, так как при последовательном соединении ток во всех элементах одинаковый. Из полученной векторной диаграммы согласно теореме Пифагора, получим:

$$U^2 = U_R^2 + U_L^2 = I^2 * R^2 + I^2 * X_L^2, \quad (2.27)$$

откуда

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{U}{Z}, \quad (2.28)$$

где Z – полное сопротивление цепи, равное отношению приложенного напряжения к току:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \frac{U}{I}. \quad (2.29)$$

С помощью полученного равенства (2.29) на основе теоремы Пифагора можно построить треугольник, называемый треугольником сопротивлений (рисунок 2.11).

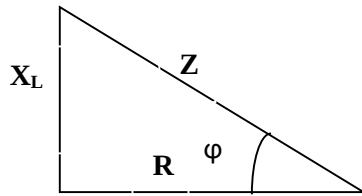


Рисунок 2.11 – Треугольник сопротивлений для цепи, содержащей катушку и резистор

Из треугольника сопротивлений получим соотношения, определяющие угол сдвига фаз между напряжением и током цепи, а также между параметрами цепи:

$$R = Z * \cos \varphi; \quad (2.30)$$

$$X_L = Z * \sin \varphi; \quad (2.31)$$

$$tg(\varphi) = \frac{X_L}{R}; \quad (2.32)$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}; \quad (2.33)$$

$$\sin \varphi = \frac{X_L}{Z}; \quad (2.34)$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{X_L}{R}\right). \quad (2.35)$$

2.8 Цепь, содержащая резистор и конденсатор

Напряжение на входе цепи (рисунок 2.12) согласно второму закону Кирхгофа для действующих значений определяется уравнением:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C. \quad (2.36)$$

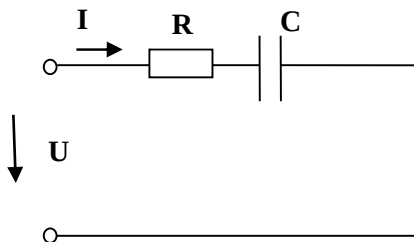


Рисунок 2.12 – Схема последовательного соединения резистора и конденсатора

Графически данное равенство может быть реализовано в виде векторной диаграммы (рисунок 2.13):

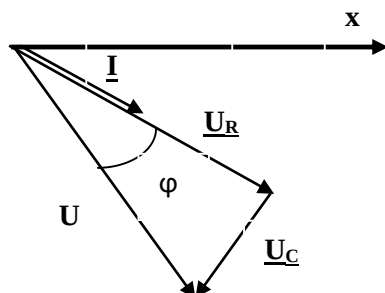


Рисунок 2.13 – Векторная диаграмма тока и напряжения в схеме последовательного соединения резистора и конденсатора

Построение векторной диаграммы осуществлялось в следующей последовательности: сначала откладывался вектор тока (I), после этого строился вектор напряжения на резисторе (U_R), который по фазе совпадает с вектором тока, после этого строился вектор напряжения на конденсаторе (U_C). Вектор напряжения на конденсаторе строился из конца вектора U_R , при этом по фазе отставая от вектора тока. В результате построения получился прямоугольный треугольник напряжений. Применяя к этому треугольнику теорему Пифагора, и расписывая напряжения по закону Ома, получаем:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{U}{Z}; \quad (2.37)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} \quad (2.38)$$

Для треугольника сопротивлений можно записать соотношения аналогичные (2.30) ... (2.35).

2.9 Последовательное соединение резистора, катушки и конденсатора

При протекании синусоидального тока через электрическую цепь, состоящую из последовательного соединения элементов R, L, C (рисунок 2.14), на них создаются синусоидальные напряжения, которые связаны между собой вторым законом Кирхгофа:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C.$$

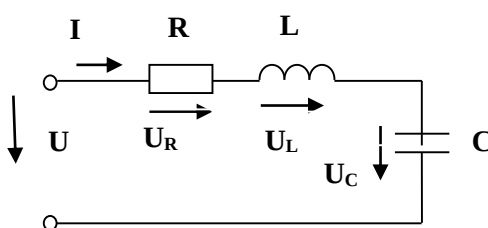
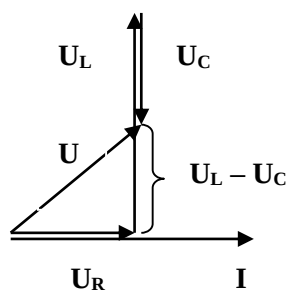
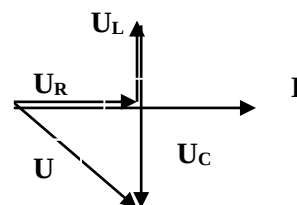


Рисунок 2.14 – Последовательное соединение элементов R, L, C

Построим векторную диаграмму с учётом известных фазовых соотношений (рисунок 2.15). Вектор напряжения на резисторе совпадает по фазе с вектором тока, на конденсаторе – отстаёт от вектора тока на 90° , а на катушке – опережает вектор тока на 90° . Суммируя три вектора напряжения на элементах цепи, получим вектор напряжения источника.



а)



б)

Рисунок 2.15 – Векторная диаграмма последовательного соединения элементов R, L, C: а) индуктивный характер нагрузки; б) ёмкостный характер нагрузки

Из векторной диаграммы определяем входное напряжение:

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{I^2 * R^2 + (I * X_L - I * X_C)^2},$$

откуда ток и полное сопротивление:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{Z}; \quad (2.39)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad (2.40)$$

где $X = X_L - X_C$ – разность индуктивного и ёмкостного сопротивления, называемая реактивным сопротивлением.

Сдвиг фаз определим из треугольника напряжений:

$$\varphi = \arctg \frac{U_L - U_C}{U_R} = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} = \arctg \frac{X}{R}. \quad (2.41)$$

Если $X_L > X_C$, то есть $X > 0$, то цепь имеет индуктивный характер. В этом случае сдвиг фаз $\varphi > 0$. Если $X_L < X_C$, то есть $X < 0$, то цепь имеет ёмкостный характер. В этом случае сдвиг фаз $\varphi < 0$. Таким образом, реактивное сопротивление X может быть как положительным ($\varphi > 0$), так и отрицательным ($\varphi < 0$). При $X_L = X_C$ реактивное сопротивление цепи $X = X_L - X_C = 0$. В этом случае цепь является чисто активной, а сдвиг фаз $\varphi = 0$. Такой режим называется резонансом напряжений, он будет подробно рассмотрен позже.

2.10 Параллельное соединение резистора, катушки и конденсатора

Рассмотрим цепь, состоящую из двух параллельных ветвей (рисунок 2.16).

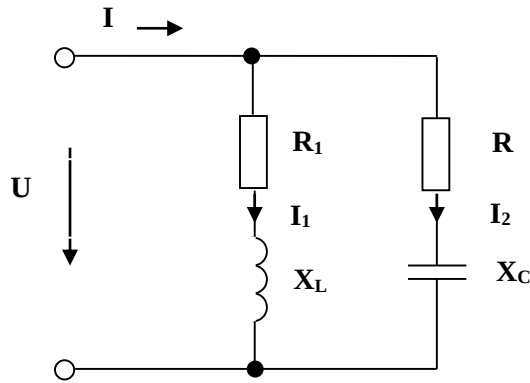


Рисунок 2.16 – Параллельное соединение резистора катушки и конденсатора

Построим векторную диаграмму токов. Предварительно рассчитаем токи в параллельных ветвях и углы их сдвига относительно приложенного напряжения. Первая ветвь содержит резистор и катушку, поэтому угол $\varphi_1 > 0$. Данный угол может быть рассчитан как $\varphi_1 = \arctg(\frac{X_L}{R_1})$. Кроме того, для данного выражения справедливы соотношения (2.28):

$$I_1 = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + X_L^2}} = \frac{U}{Z_1}.$$

Характер второй ветви активно-ёмкостный. В ней вектор тока I_2 опережает вектор напряжения и $\varphi_1 < 0$. Поэтому:

$$I_2 = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + X_L^2}} = \frac{U}{Z_2};$$

$$\varphi_2 = -\arctg(\frac{X_C}{R_1}) < 0.$$

В качестве базового вектора принимаем вектор напряжения источника $\underline{U}$, являющийся общим для обеих ветвей. Относительно этого вектора откладываем токи I_1 и I_2 (под углами φ_1 и φ_2 к базовому вектору). Пользуясь первым правилом Кирхгофа, строим входной ток:

$$\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2}.$$

Остальные соотношения получаем из векторной диаграммы (рисунок 2.17).

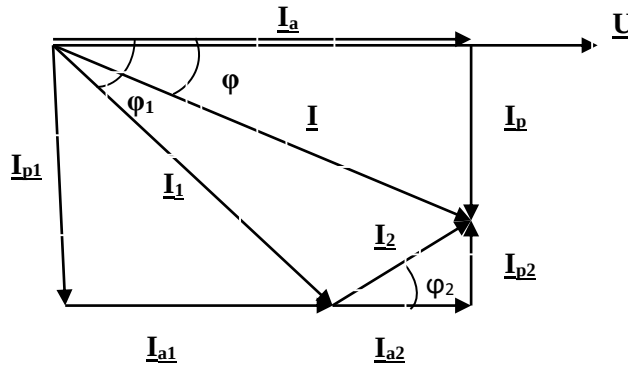


Рисунок 2.17 – Векторная диаграмма параллельного соединения элементов R, L, C

Для этого представим каждый вектор проекциями на перпендикулярные оси. Проекцию вектора тока на направление вектора напряжения назовём активной составляющей тока $\underline{I}_a$, а проекцией на перпендикулярную ось – реактивной составляющей $\underline{I}_p$. Из диаграммы активная составляющая общего тока определяется как сумма активных составляющих токов в параллельных ветвях:

$$I_a = I_{a1} + I_{a2} = I_1 * \cos \varphi_1 + I_2 * \cos \varphi_2 = \frac{U}{Z_1} * \frac{R_1}{Z_1} + \frac{U}{Z_2} * \frac{R_2}{Z_2} = U * \left(\frac{R_1}{Z_1^2} + \frac{R_2}{Z_2^2} \right), \quad (2.42)$$

где g_1 – активная проводимость первой ветви; g_2 – активная проводимость второй ветви; g – активная проводимость всей цепи:

$$g_1 = \frac{R_1}{Z_1^2}; g_2 = \frac{R_2}{Z_2^2}; g = g_1 + g_2. \quad (2.43)$$

Реактивная составляющая входного тока определяется как алгебраическая сумма реактивных составляющих токов в параллельных ветвях. Реактивную составляющую ветви с катушкой считают положительной, а ветви с конденсатором – отрицательной.

$$I_p = I_{p1} + I_{p2} = I_1 * \sin \varphi_1 + I_2 * \sin \varphi_2 = \frac{U}{Z_1} * \frac{X_1}{Z_1} + \frac{U}{Z_2} * \frac{X}{Z_2} = U * \left(\frac{X_{L1}}{Z_1^2} - \frac{X_{C2}}{Z_2^2} \right), \quad (2.44)$$

где b_{L1} – активная проводимость первой ветви; b_{C2} – активная проводимость второй ветви; b – активная проводимость всей цепи:

$$b_{L1} = \frac{X_{L1}}{Z_1^2}; b_{C2} = \frac{X_{C2}}{Z_2^2}; b = b_{L1} - b_{C2}. \quad (2.45)$$

Ток на входе цепи (см. рисунок 2.17) находится исходя из соотношения:

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = \sqrt{U^2 * g^2 + U^2 * b^2} = U * \sqrt{g^2 + b^2} = U * y, \quad (2.46)$$

где $y = \sqrt{g^2 + b^2}$ – полная проводимость цепи.

Пример 1: Рассчитать показания электроизмерительных приборов для схемы (рисунок 2.18) до и после замыкания конденсатора, используя данные таблицы 1. Для каждого случая начертить векторную диаграмму.

Таблица 1 – Исходные данные к задаче 1

$U_m, \text{В}$	$\omega, 1/\text{с}$	$R, \text{Ом}$	$L, \text{Гн}$	$C, \text{мкФ}$
212	200	30	0,3	50

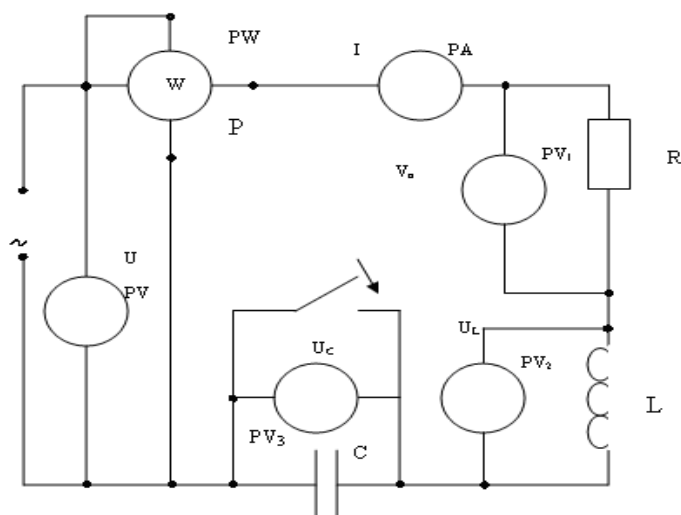


Рисунок 2.18 – Схема к примеру расчёта 1

Решение:

$$u = U_m \cdot \sin \omega \cdot t = 212 \cdot \sin 200t .$$

Вольтметр показывает действующее значение напряжения:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{212}{\sqrt{2}} = 151 \text{ В} .$$

1. Цепь конденсатора отключена

Сопротивление конденсатора:

$$\chi_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{200 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 100 \text{ Ом}.$$

Сопротивление катушки индуктивности:

$$\chi_L = \omega L = 200 \cdot 0,3 = 60 \text{ Ом}.$$

Полное сопротивление цепи:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\chi_L - \chi_C)^2} = \sqrt{30^2 + (60 - 100)^2} = 50 \text{ Ом}.$$

Действующее значение тока (показания амперметра РА):

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{151}{50} = 3 \text{ А}.$$

Показания вольтметра PV₁:

$$U_a = I \cdot R = 3 \cdot 30 = 90 \text{ В}.$$

Показания вольтметра PV₂:

$$U_L = I \cdot \chi_L = 3 \cdot 60 = 180 \text{ В}.$$

Показания вольтметра PV₃:

$$U_C = I \cdot \chi_C = 3 \cdot 100 = 300 \text{ В}.$$

Построим векторную диаграмму, представленную на рисунке 2.19, и по длине вектора $\bar{U} = \bar{U}_a + \bar{U}_L + \bar{U}_C$ получим ответ:

$$U = \sqrt{U_a^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{90^2 + (180 - 300)^2} = 150 \text{ В}.$$

Коэффициент мощности и активная мощность цепи:

$$\varphi = \arctg \frac{\chi_L - \chi_C}{R} = \arctg \frac{60 - 100}{30} = -53^\circ;$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = 150 \cdot 3 \cdot 0,602 = 271 \text{ Вт}.$$

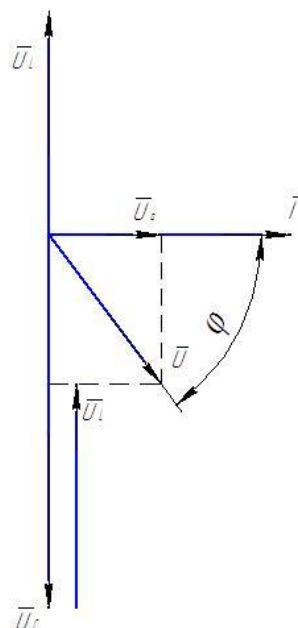


Рисунок 2.19 – Векторная диаграмма

2. Цепь конденсатора включена

Сопротивление катушки индуктивности:

$$\chi_L = \omega L = 200 \cdot 0,3 = 60 \text{ Ом}.$$

Полное сопротивление цепи:

$$Z = \sqrt{R^2 + \chi_L^2} = \sqrt{30^2 + 60^2} = 67 \text{ Ом}.$$

Действующее значение тока (показания амперметра РА):

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{151}{67} = 2,25 \text{ А}.$$

Показания вольтметра PV₁:

$$U_a = I \cdot R = 2,25 \cdot 30 = 67,5 \text{ В}.$$

Показания вольтметра PV₂:

$$U_L = I \cdot \chi_L = 2,25 \cdot 60 = 135 \text{ В}.$$

Построим векторную диаграмму, представленную на рисунке 2.20, и по длине вектора $\bar{U} = \bar{U}_a + \bar{U}_L$ получим ответ:

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_L^2} = \sqrt{67,5^2 + 135^2} \approx 151 \text{ В}.$$

Коэффициент мощности и активная мощность цепи:

$$\varphi = \arctg \frac{\chi_L}{R} = \arctg \frac{60}{30} = 63,4^\circ;$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = 151 \cdot 2,25 \cdot 0,448 = 152,2 \text{ Вт.}$$

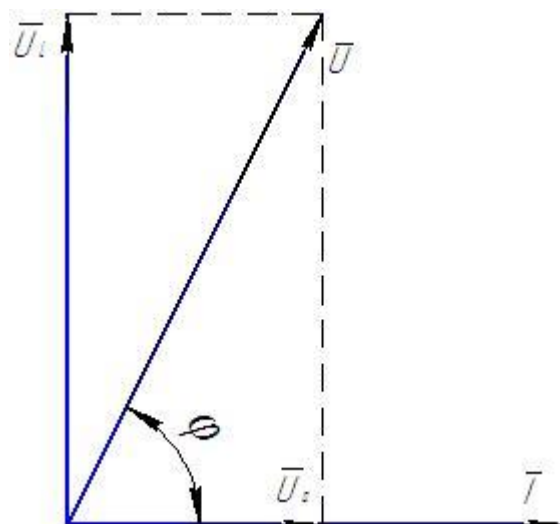


Рисунок 2.20 – Векторная диаграмма к определению угла сдвига фаз

Пример 2: Рассчитать показания электроизмерительных приборов для схемы (рисунок 2.21) до и после замыкания конденсатора, используя данные таблицы 2. Для каждого случая начертить векторную диаграмму.

Таблица 2 – Исходные данные к задаче 2

$U_m, \text{В}$	$\omega, 1/\text{с}$	$R, \text{Ом}$	$L, \text{Гн}$	$C, \text{мкФ}$
141	250	25	0,05	200

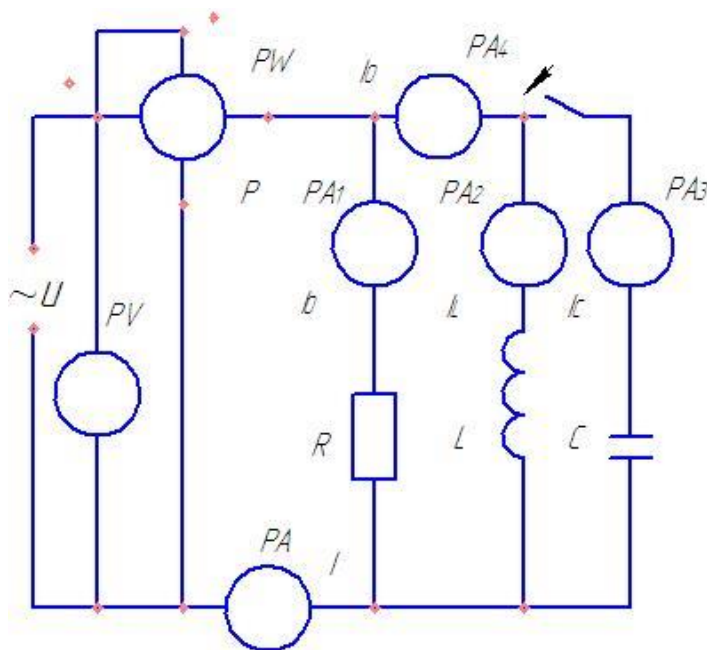


Рисунок 2.21 – Схема к примеру расчёта 2

Решение:

$$u = U_m \cdot \sin \omega \cdot t = 141 \cdot \sin 250t .$$

1. Цепь конденсатора отключена.

Вольтметр показывает действующее значение напряжения:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{141}{\sqrt{2}} = 100 \text{ В} .$$

Сопротивление конденсатора:

$$\chi_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{250 \cdot 200 \cdot 10^{-6}} = 20 \text{ Ом} .$$

Сопротивление катушки индуктивности:

$$\chi_L = \omega L = 250 \cdot 0,05 = 12,5 \text{ Ом} .$$

Показания амперметра PA₁:

$$I_a = \frac{U}{R} = \frac{100}{25} = 4 \text{ А} .$$

Показания амперметров PA₄ и PA₂:

$$I_L = \frac{U}{\chi_L} = \frac{100}{12,5} = 8 \text{ А} .$$

Показания амперметра РА:

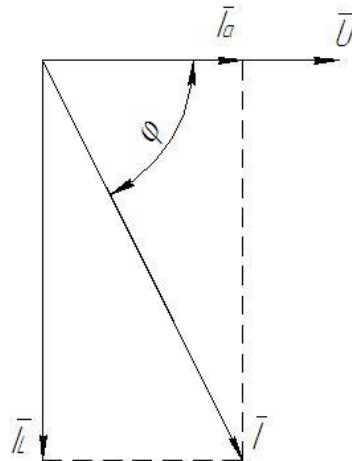
$$I = \sqrt{I_a^2 + I_L^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 10 \text{ A}.$$

Коэффициент мощности и активная мощность цепи:

$$\cos \varphi = \frac{I_a}{I} = \frac{4}{10} = 0,4,$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = 100 \cdot 10 \cdot 0,4 = 400 \text{ Вт}.$$

Строим векторную диаграмму:



2. Цепь конденсатора включена:

Показания амперметра РА₂:

$$I_L = \frac{U}{\chi_L} = \frac{100}{12,5} = 8 \text{ A}.$$

Показания амперметра РА₃:

$$I_C = \frac{U}{\chi_C} = \frac{100}{20} = 5 \text{ A}.$$

Сопrotивление LC-цепи:

$$z_1 = \frac{\chi_L \cdot \chi_C}{\chi_L + \chi_C} = \frac{12,5 \cdot 20}{12,5 + 20} = 7,7 \text{ Ом}.$$

Показания амперметра РА₄:

$$I_0 = \frac{U}{z_1} = \frac{100}{7,7} = 13 \text{ A}.$$

Полное сопротивление цепи:

$$Z = \frac{Z_1 \cdot \chi_C}{Z_1 + \chi_C} = \frac{7,7 \cdot 20}{7,7 + 20} = 5,6 \text{ Ом}.$$

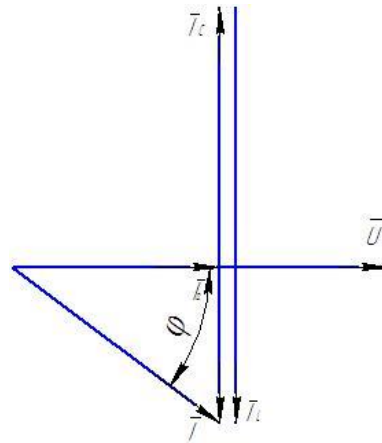
Показания амперметра РА:

$$I = \sqrt{I_a^2 + (I_C - I_L)^2} = \sqrt{4^2 + (5 - 8)^2} = 5 \text{ А}.$$

Коэффициент мощности и активная мощность цепи:

$$\cos \varphi = \frac{I_a}{I} = \frac{4}{5} = 0,8;$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = 100 \cdot 5 \cdot 0,8 = 400 \text{ Вт}.$$



2.11 Мощность цепи синусоидального тока

Рассмотрим участок электрической цепи, напряжение на котором:

$$u = U_m \cdot \sin \omega \cdot t, i = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi).$$

Определим мгновенную мощность:

$$\begin{aligned} p &= u \cdot i = U_m \cdot I_m \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi) = \\ &= U \cdot I \cdot [\cos \varphi - \cos(2 \cdot \omega \cdot t - \varphi)]. \end{aligned}$$

Активная мощность, поступающая в приёмник, равна среднему значению мгновенной мощности за период:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p \cdot dt = U \cdot I \cdot \cos \varphi. \quad (2.47)$$

При расчётах электрических цепей и эксплуатации электрооборудования пользуются также понятием реактивная мощность, которая вычисляется по формуле:

$$Q = U * I * \sin \varphi. \quad (2.48)$$

Произведение действующих значений тока и напряжения на входе цепи называется полной мощностью:

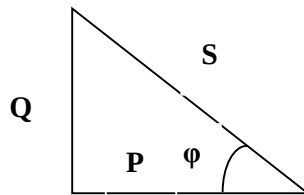
$$S = U * I. \quad (2.49)$$

Сравнение формул (2.47) ... (2.49) даёт возможность установить связь между активной, реактивной и полной мощностями:

$$S^2 = U^2 * I^2 = (U * I * \cos \varphi)^2 + (U * I * \sin \varphi)^2 = P^2 + Q^2, \quad (2.50)$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (2.51)$$

Соотношение (2.51) удобно представить в виде прямоугольного треугольника мощностей:



Из соотношений в данном треугольнике получаем соотношения:

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{Q}{P}; \cos \varphi = \frac{P}{S}; \sin \varphi = \frac{Q}{S}. \quad (2.52)$$

В заключении следует отметить, что активная мощность всегда положительна, а реактивная мощность может быть как положительной, так и отрицательной.

2.12 Комплексный метод расчёта цепей синусоидального тока.

Комплексные изображения синусоидальных функций времени

Комплексные изображения позволяют совместить простоту и наглядность векторных диаграмм с возможностью проведения точных аналитических расчетов.

Расчет линейных электрических схем синусоидального тока в установившемся режиме аналогичен расчету электрических схем постоянного тока. В обоих случаях составляют систему алгебраических уравнений по методам, основанным на законах Ома и Кирхгофа.

Для схем постоянного тока уравнения составляют по действительным значениям напряжений, токов, сопротивлений и проводимостей. В схемах же гармонического тока для алгебраизации интегро-дифференциальных уравнений применяют комплексные величины: $\underline{U}$, $\underline{Z}$, $\underline{E}$ и т.д. При этом все параметры записывают в виде комплексных чисел в одной из форм записи: алгебраической, показательной или тригонометрической. Выбор той или иной формы в каждом конкретном случае диктуется удобством осуществления нужной математической операции с комплексными числами: при суммировании и вычитании удобна алгебраическая форма, а при умножении и делении – показательная.

Напомним некоторые правила действия с комплексными числами, известные из математики и часто используемые при анализе цепей синусоидального тока. При суммировании комплексных чисел отдельно суммируются их действительные и мнимые составляющие.

Если $\underline{A} = a_1 + j * a_2$, $\underline{B} = b_1 + j * b_2$ и $\underline{C} = \underline{A} + \underline{B}$, тогда $\underline{C} = c_1 + j * c_2$, где $c_1 = a_1 + b_1$ и $c_2 = a_2 + b_2$.

В случае умножения двух комплексных чисел их модули перемножают, а аргументы суммируют, следовательно, умножение удобно проводить в показательной форме записи. Если $\underline{A} = A * e^{j*\varphi_a}$, $\underline{B} = B * e^{j*\varphi_b}$ и $\underline{C} = \underline{A} * \underline{B}$, то $\underline{C} = C * e^{j*\varphi_c}$, где $C = A * B$ и $\varphi_c = \varphi_a + \varphi_b$.

При делении комплексных чисел их модули делят, а аргументы вычитают, т.е. если $\underline{C} = \frac{\underline{A}}{\underline{B}}$, то $\underline{C} = C * e^{j*\varphi_c}$, где $C = \frac{A}{B}$ и $\varphi_c = \varphi_a - \varphi_b$.

Комплексные числа $\underline{A}$ и $\underline{A}^*$ называют сопряжёнными, если их модули равны, а аргументы равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Например если $\underline{A} = A * e^{j*\varphi_a}$, то $\underline{A}^* = A * e^{-j*\varphi_a}$ – сопряжённое ему комплексное число.

Итак, любую синусоидальную функцию можно однозначно изобразить вектором на комплексной плоскости, который, в свою очередь, может быть выражен соответствующим ему комплексным числом. Очевидно, это комплексное число является некоторым условным изображением исходной синусоидальной функции времени, поэтому метод расчета с помощью комплексных чисел называют символическим.

Например, пусть зависимость мгновенного значения напряжения от времени выражается законом: $u = U_m * \sin(\omega * t + 30^\circ)$. Тогда комплекс действующего значения напряжения записывается: $\underline{U} = U * e^{j*30^\circ}$, где $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ – модуль действующего значения напряжения.

При необходимости всегда можно осуществить переход от комплексной величины к ее мгновенному значению.

2.13 Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме для линейных цепей синусоидального тока

Формулы, выражающие законы Ома и Кирхгофа, идентичны для электрических цепей постоянного и переменного тока. Это позволяет использовать для расчета цепей синусоидального тока все методы расчета цепей постоянного тока, которые были рассмотрены в главе 1.

Порядок расчета цепей остается тем же, что и при расчете цепей постоянного тока, но ЭДС, напряжение, токи и сопротивления следует

рассматривать как комплексные величины и производить вычисления комплексным методом.

Составим уравнения по второму правилу Кирхгофа для схемы (рисунок 2.22).

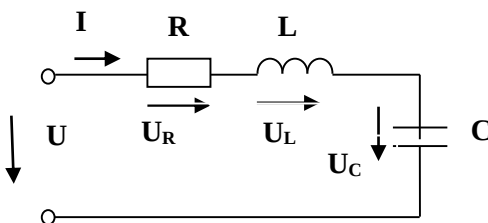


Рисунок 2.22 – Последовательное соединение элементов R, L, C

Получим следующие выражения:

$$\underline{U}_R = \underline{I} * \underline{Z}_R = \underline{I} * R; \quad (2.53)$$

$$\underline{U}_L = \underline{I} * \underline{Z}_L = \underline{I} * j * X_L; \quad (2.54)$$

$$\underline{U}_C = \underline{I} * \underline{Z}_C = -\underline{I} * j * X_C; \quad (2.55)$$

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C, \quad (2.56)$$

где $\underline{U}_R$ – комплекс действующего значения напряжения на резисторе;

$\underline{U}_L$ – комплекс действующего значения напряжения на катушке;

$\underline{U}_C$ – комплекс действующего значения напряжения на конденсаторе;

$\underline{I}$ – комплекс действующего тока, протекающего в цепи;

$\underline{Z}_R$ – комплекс полного сопротивления резистора;

$\underline{Z}_L$ – комплекс полного сопротивления катушки;

$\underline{Z}_C$ – комплекс полного сопротивления конденсатора.

Из равенств (2.53) ... (2.55) можно сделать вывод о величинах комплексов сопротивлений элементов, входящих в электрическую цепь:

$$\underline{Z}_R = R; \quad (2.57)$$

$$\underline{Z}_L = j * X_L; \quad (2.58)$$

$$\underline{Z}_C = -j * X_C. \quad (2.59)$$

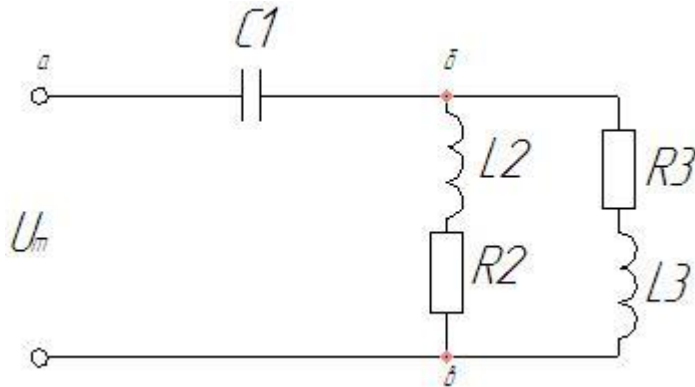
После подстановки (2.53) ... (2.55) в равенство (2.56) и в результате несложных преобразований можно получить равенство:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}}{R + j*(X_L - X_C)}. \quad (2.60)$$

Данное равенство представляет собой закон Ома в комплексной форме.

Пример.

$R_2 = 9 \text{ Ом}$ $R_3 = 18 \text{ Ом}$ $L_2 = 60 \text{ мГн}$ $L_3 = 40 \text{ мГн}$ C_1 $= 150 \text{ мкФ}$ U_m $= 100\sqrt{2} \text{ В}$ $\psi_u = \frac{\pi}{3} \text{ рад}$ $f = 50 \text{ Гц}$ $I_1 \dots I_6 - ?$



1. Определим комплексные сопротивления ветвей расчетной схемы

$$\underline{Z}_1 = -j \frac{1}{\omega C_1} = -j21,221 = 21,221e^{j90} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 = 9 + j18,85 = 20,888e^{j64,478} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + j\omega L_3 = 18 + j12,566 = 21,952e^{j34,919} \text{ Ом}.$$

2. Находим эквивалентное сопротивление параллельных ветвей:

$$\begin{aligned} Z_{\text{бв}} &= \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{(9 + j18,85) \cdot (18 + j12,566)}{(9 + j18,85) + (18 + j12,566)} = 7,104 + 8,489j = \\ &= 11,069e^{j50,076} \text{ Ом}. \end{aligned}$$

3. Схема рассчитываемой цепи теперь имеет вид цепи с последовательным соединением приемников. Комплексное сопротивление всей цепи:

$$Z = Z_1 + Z_{\text{бв}} = (-j21,221) + (7,104 + j8,489) = 7,104 - 12,732j = 14,580e^{-j60,840} \text{ Ом.}$$

4. Определим ток I_1 в неразветвленной цепи. Для этого выразим приложенное к цепи напряжение U в комплексной форме. Так как в условии задачи начальная фаза напряжения не задана, принимаем ее равной нулю, располагая тем самым вектор напряжения с вещественной осью комплексной плоскости:

$$I_1 = \frac{U}{Z} = \frac{100\sqrt{2}e^{j60}}{7,104 - j12,732} = -4,958 + 8,304j = 9,672e^{j120,840} \text{ А.}$$

5. Определяем комплексное действующее значение на разветвленном участке цепи:

$$U_{\text{бв}} = Z_{\text{бв}} \cdot I_1 = (7,104 + j8,489) \cdot (-4,958 + 8,304j) = -105,709 + 16,908j = 107,053e^{j170,913} \text{ В.}$$

6. Комплексное действующее значение на неразветвленной части цепи:

$$U_{a6} = Z_1 \cdot I_1 = (-j21,221) \cdot (-4,958 + 8,304j) = 176,209 + 105,202j = 205,224e^{j30,839} \text{ В.}$$

7. Определяем токи в ветвях цепи:

$$I_2 = \frac{U_{\text{бв}}}{Z_2} = \frac{-105,709 + 16,908j}{9 + j18,85} = -1,45 + 4,916j = 5,126e^{j106,436} \text{ А;}$$

$$I_3 = \frac{U_{\text{бв}}}{Z_3} = \frac{-105,709 + 16,908j}{18 + j12,566} = -3,507 + 3,388j = 4,876e^{j135,993} \text{ А.}$$

8. Определим напряжения на участках схемы

$$U_{C1} = I_1(-j) \frac{1}{\omega C_1} = (-4,958 + 8,304j) \cdot (-j21,221) =$$

$$= 176,209 + 105,202j = 205,224 \cdot e^{j30,839} \text{ В;}$$

$$U_1 = U_{C1} = 176,209 + 105,202j = 205,224 \cdot e^{j30,839} \text{ В;}$$

$$U_{R2} = I_2 R_2 = -13.051 + 44.241j = 46,126 \cdot e^{j106,436} \text{ В};$$

$$U_{L2} = I_2 j\omega L_2 = -92.658 - 27.333j = 96,606 \cdot e^{-j163,564} \text{ В};$$

$$U_2 = U_{R2} + U_{L2} = -105.709 + 16.908j = 107,052 \cdot e^{j170,913} \text{ В};$$

$$U_{L3} = I_3 j\omega L_3 = -42.575 - 44.076j = 61,28 \cdot e^{-j134,007} \text{ В};$$

$$U_{R3} = I_3 R_3 = -63.134 + 60.984j = 87,778 \cdot e^{j135,993} \text{ В};$$

$$U_3 = U_{L3} + U_{R3} = -105.709 + 16.908j = 107,052 \cdot e^{j170,913} \text{ В}.$$

9. Вычисляем полную, активную и реактивную мощности цепи:

$$S = P \pm jQ = U \cdot I_1 = 100\sqrt{2}e^{j60} \cdot (-4.958 + 8.304j) =$$

$$= -1363 - 19.959j = 1363.146e^{-j179.161} \text{ ВА}$$

10. Отсюда

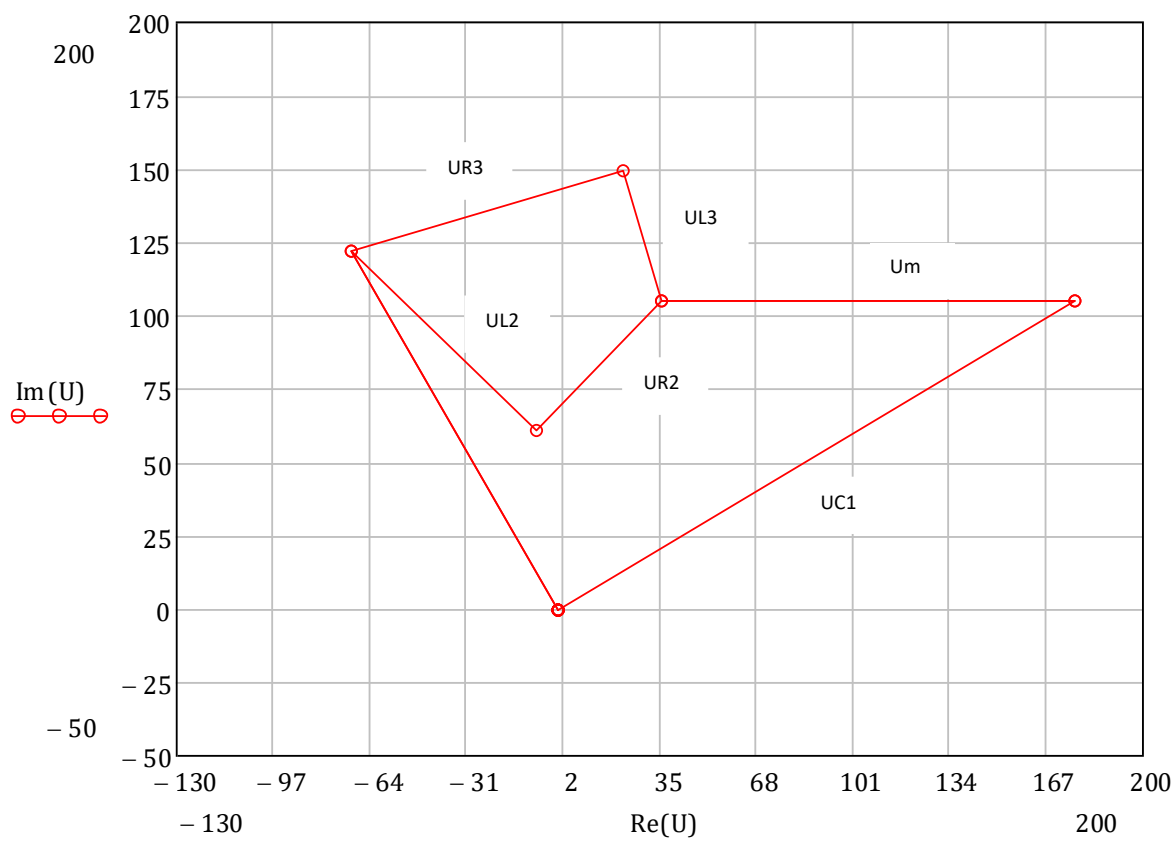
$$S = 1363 \text{ В} \cdot \text{А}; P = 1363 \text{ Вт}; Q = 20 \text{ вар}.$$

11. Составим баланс мощностей:

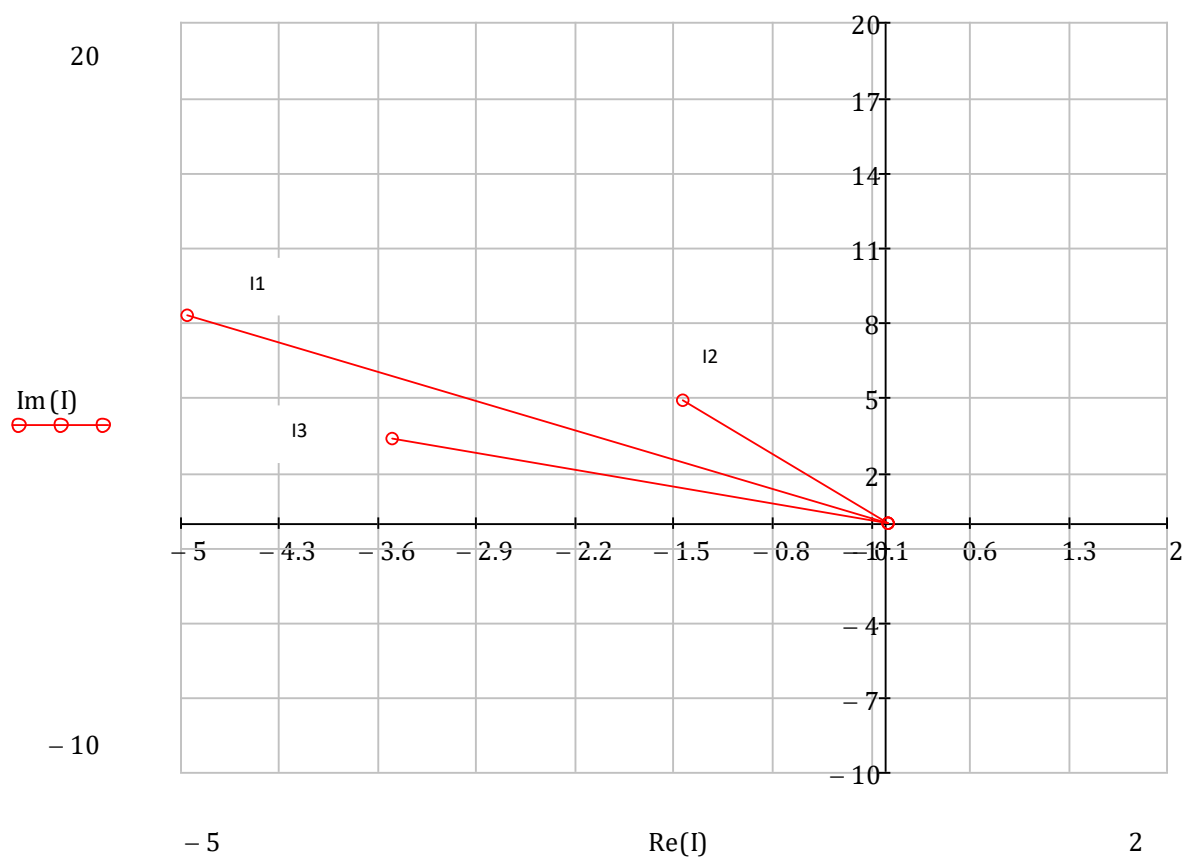
$$P = P_1 + P_2 + P_3 = R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 = 1362 \text{ Вт};$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = -X_{C1} I_1^2 + X_{L2} I_2^2 + X_{L3} I_3^2 = 19 \text{ вар}.$$

12. Топографическая диаграмма напряжений



13. Диаграмма токов:



2.14 Резонанс в электрических цепях

Резонанс представляет собой явление в электрической цепи, содержащей участки, имеющие индуктивный и ёмкостный характер, при котором разность фаз напряжения и тока на входе цепи равно нулю. Ток совпадает по фазе с напряжением, если входное реактивное сопротивление или входная реактивная проводимость цепи равна нулю.

Резонанс напряжений

Рассмотрим последовательное соединение резистора, катушки и конденсатора (рисунок 2.23).

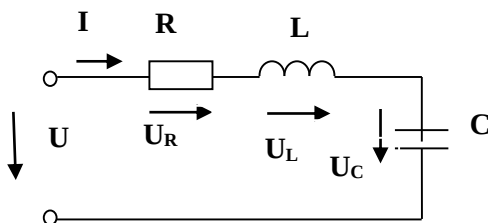


Рисунок 2.23 – Последовательное соединение элементов R, L, C

При резонансе индуктивная составляющая полного сопротивления компенсируется ёмкостной составляющей. В результате реактивное сопротивление и реактивная мощность на входе цепи равны нулю:

$$X = X_L - X_C = 0; X_L = X_C; \omega * L = \frac{1}{\omega * C}. \quad (2.61)$$

Угловая частота, при которой в цепи наступает резонанс, называется резонансной угловой частотой:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L * C}}. \quad (2.62)$$

Векторная диаграмма цепи при резонансе напряжений представлена на рисунке 2.24.

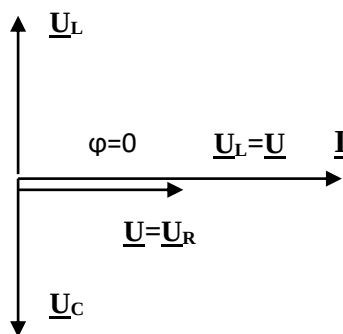


Рисунок 2.24 – Векторная диаграмма резонанса напряжений

Полное сопротивление цепи при резонансе равно чисто активному сопротивлению и имеет минимальное значение:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{R}. \quad (2.63)$$

Резонанс токов

Рассмотрим схему с двумя параллельными ветвями: одна – с резистором и конденсатором, другая – с резистором и катушкой (рисунок 2.25). В этой цепи может возникнуть явление резонанса, когда общий ток совпадает по фазе с напряжением, а входная реактивная проводимость равна нулю:

$$b = b_C - b_L = 0 \text{ или } b_L = b_C. \quad (2.64)$$

При соблюдении этого условия противоположные по фазе реактивные составляющие токов равны (рисунок 2.26), поэтому резонанс в данной цепи получил название резонанса токов.

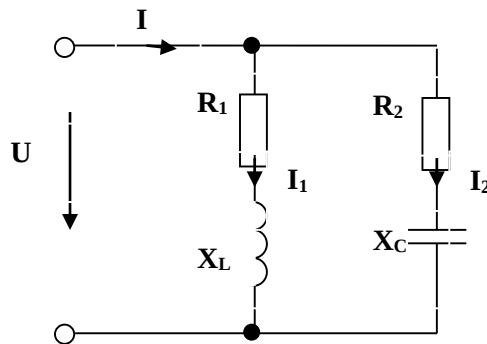


Рисунок 2.25 – Параллельное соединение резистора катушки и конденсатора

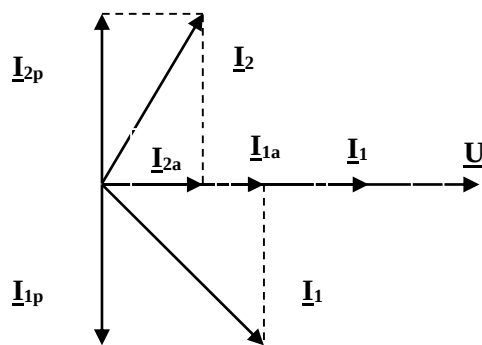


Рисунок 2.26 – Векторная диаграмма резонанса токов

Используя выражение (2.45) и подставляя его в выражение (2.64), получаем уравнение:

$$\frac{\omega * L}{R_1^2 + \omega^2 * L^2} = \frac{\frac{1}{\omega * C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 * C^2}}. \quad (2.65)$$

Решив уравнение (2.65) относительно частоты ω , получаем выражение резонансной частоты.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L * C}} * \sqrt{\frac{R_1^2 - \frac{L}{C}}{R_2^2 - \frac{L}{C}}}. \quad (2.66)$$

В частном случае когда $R_1 = R_2$ выражение (2.57) упрощается $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L * C}}$.

При $R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ резонанс будет при любой частоте.

2.15 Повышение коэффициента мощности в цепях синусоидального тока

Большинство современных потребителей электрической энергии имеют индуктивный характер нагрузки, токи которой по фазе отстают от напряжений источника.

Активная мощность таких потребителей при заданном токе и напряжении зависит от коэффициента мощности ($\cos \varphi$):

$$P = U * I * \cos \varphi; \quad I = \frac{P}{U * \cos \varphi}.$$

Поэтому повышение коэффициента мощности, при фиксированной мощности, приводит к уменьшению тока, а, следовательно – к уменьшению потерь в проводах линии электропередач.

Для повышения экономичности энергетических установок повышают коэффициент мощности, используя батареи конденсаторов. Батареи включают параллельно нагрузке.

Рассчитаем ёмкость батареи, необходимую для уменьшения угла сдвига фаз с φ_1 до φ_2 . Для этого будем использовать векторную диаграмму, приведённую на рисунке 2.27.

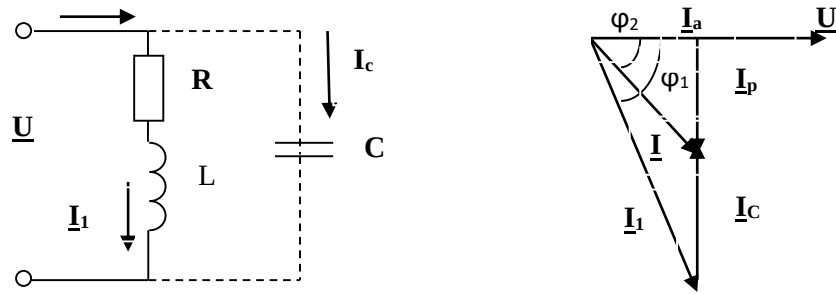


Рисунок 2.27 – К расчёту ёмкости батареи для повышения коэффициента мощности

После подключения к потребителю батареи конденсаторов, ток $\underline{I}$ определяется как сумма векторов $\underline{I}_1$ и $\underline{I}_c$. Ток через батарею конденсаторов определяется выражением:

$$I_c = I_{p1} - I_p = I_a * \operatorname{tg} \varphi_1 - I_a * \operatorname{tg} \varphi_2 = \omega * C * U.$$

Учитывая, что $P = U * I_a$, определим ёмкость конденсаторной батареи:

$$C = \frac{P}{\omega * U^2} * (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2). \quad (2.67)$$

ГЛАВА 3 ТРЁХФАЗНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

3.1 Общие сведения

Электрическая энергия вырабатывается, передаётся и потребляется с помощью трёхфазных источников, линий передач и приёмников энергии. Это объясняется преимуществами трёхфазных систем по сравнению с однофазными. Несмотря на общность теории синусоидального тока, расчёт и анализ трёхфазных цепей сложнее, чем однофазных, т. к. они содержат несколько ЭДС и токов, и поэтому необходимо учитывать схемы соединения источников и приёмников.

3.2 Трёхфазные системы

Трёхфазной системой синусоидального тока называется совокупность трёх электрических цепей, в которых действуют синусоидальные ЭДС одной и той же частоты, сдвинутые относительно друг друга по фазе.

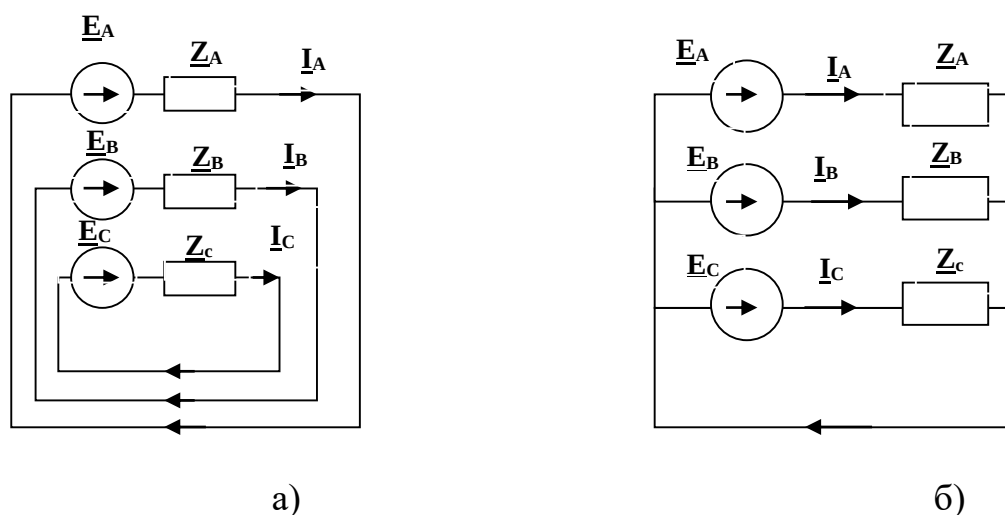


Рисунок 3.1 – Трёхфазные цепи: а) несвязанные; б) связанные

Поскольку три источника вырабатывают ЭДС одинаковой частоты и амплитуды, то единственным их отличием является начальная фаза. Поэтому составные части трёхфазной цепи названы фазами. Они обозначаются латинскими буквами (А, В, С).

Если цепи, образующие трёхфазную систему (рисунок 3.1, а), не соединены электрически, их называют несвязанными. На практике, как правило, применяют связанные трёхфазные цепи (рисунок 3.1, б).

В трёхфазной симметричной системе ЭДС фаз сдвинуты друг относительно друга по фазе на угол 120° .

$$e_A = E_m * \sin \omega * t; \quad (3.1)$$

$$e_B = E_m * \sin(\omega * t - 120^\circ); \quad (3.2)$$

$$e_C = E_m * \sin(\omega * t + 120^\circ). \quad (3.3)$$

Обычно принимают начальную фазу ЭДС фазы А равной нулю. ЭДС можно изобразить графически на комплексной плоскости (рисунок 3.2).

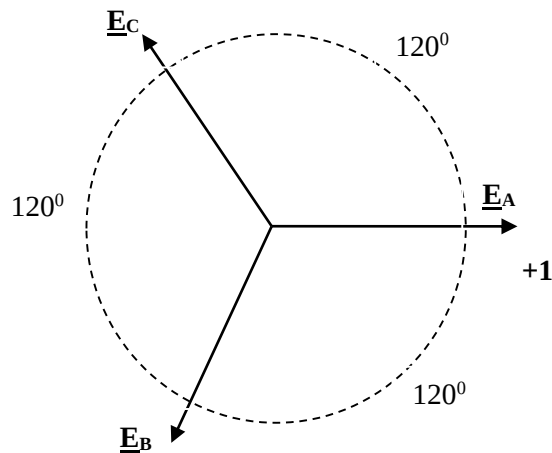


Рисунок 3.2 – ЭДС трёхфазной симметричной системы

Комплексы ЭДС трёхфазной симметричной системы:

$$\underline{E}_A = E; \underline{E}_B = E * e^{-j*120^\circ}; \underline{E}_C = E * e^{j*120^\circ}. \quad (3.4)$$

Основным свойством симметричной трёхфазной системы ЭДС (3.1) ... (3.3) является то, что суммы их мгновенных значений в любой момент времени равны нулю:

$$e_A + e_B + e_C = 0. \quad (3.5)$$

В этом легко убедиться сложив графически векторы на диаграмме (3.4):

$$\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = 0. \quad (3.6)$$

Порядок, в котором ЭДС в фазах генератора проходят через одинаковые значения, называется последовательностью фаз, или порядком чередования фаз. Прямой последовательности фаз соответствует чередование А, В, С (вращение векторов на диаграмме против часовой стрелки). При изменении направления вращения на противоположное последовательность фаз получается обратной: С, В, А.

3.3 Схемы соединения трёхфазных цепей

Существуют две основные схемы соединения обмоток генераторов, двигателей, трансформаторов и приёмников в трёхфазных цепях – «звезда» и «треугольник».

Если соединить вместе концы обмоток генератора, то получается соединение звездой (рисунок 3.3, а). Общая точка фазных обмоток называется нейтральной точкой генератора и обозначается буквой «N». В дальнейшем фазы генератора для простоты на схемах будем изображать не под углом 120° , а параллельно (рисунок 3.3, б).

Если соединить обмотки генератора в замкнутую электрическую цепь, так чтобы конец одной обмотки соединялся с началом последующей, то получится соединение в треугольник (рисунок 3.4).

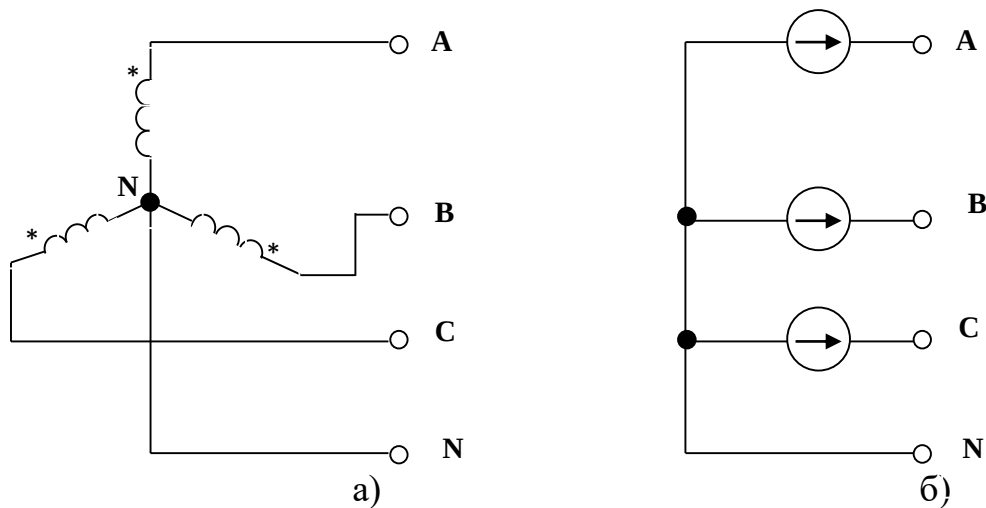


Рисунок 3.3 – Соединение обмоток генератора звездой

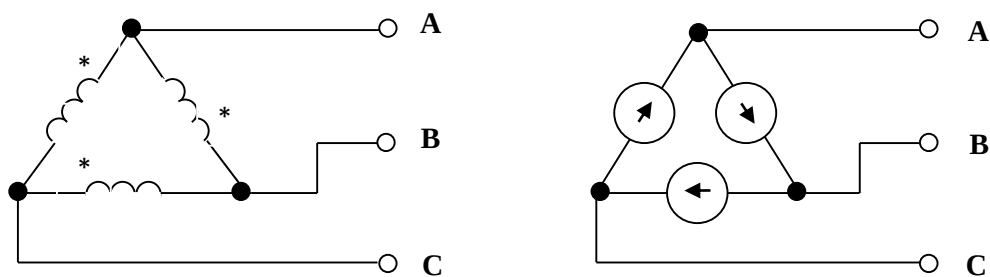


Рисунок 3.4 – Соединение обмоток генератора в треугольник

Аналогичным образом в трёхфазных цепях соединяется нагрузка.

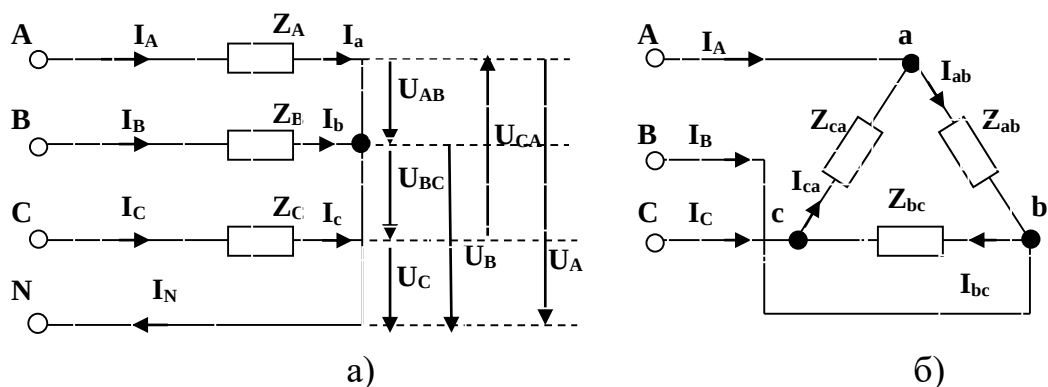


Рисунок 3.5 – Соединение нагрузки в трёхфазных цепях:

а) соединение в звезду; б) соединение в треугольник

Токи, протекающие по проводам линии электропередач от генератора к потребителю, называются **линейными токами** (I_A , I_B , I_C). Токи, протекающие

по нагрузке, называют **фазными токами** (I_{ab}, I_{bc}, I_{ca} – в треугольнике; I_a, I_b, I_c – в звезде).

Напряжения между проводами линии электропередач называют **линейными напряжениями** (U_{AB}, U_{BC}, U_{CA}); напряжения, приложенные к нагрузке, называют **фазными напряжениями** (U_{ab}, U_{bc}, U_{ca} – при соединении в треугольник; U_A, U_B, U_C – при соединении в звезду).

3.4 Симметричный режим работы при соединении нагрузки в звезду

При соединении нагрузки звездой выполняется равенство:

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = Z * e^{j*\varphi}. \quad (3.7)$$

Пусть в цепи, изображённой на рисунке 3.6, нагрузка симметричная (а) и носит индуктивный характер. Построим векторную диаграмму для этой цепи (б).

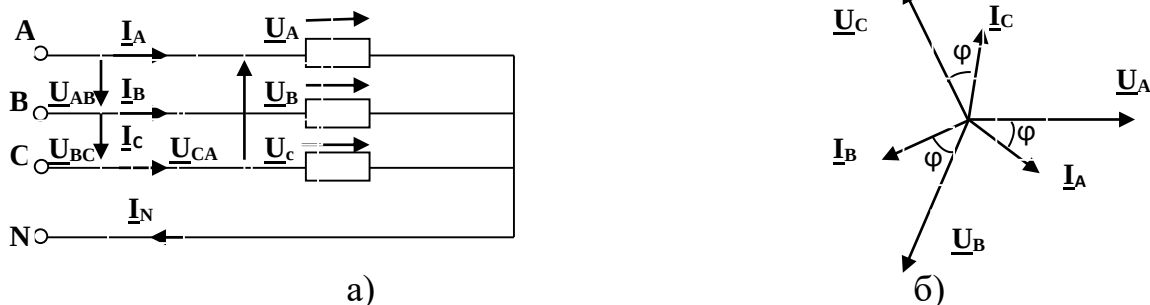


Рисунок 3.6 – Симметричный режим работы при соединении нагрузки в звезду

Фазные токи отстают от фазных напряжений на угол φ и образуют симметричную систему токов. По первому закону Кирхгофа (рисунок 3.6, б), их сумма равна току в нейтральном проводе: $\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C$. Так как сумма трёх равных по модулю векторов, сдвинутых по фазе относительно друг друга на 120° , равна нулю, то $\underline{I}_N = 0$, и нейтральный провод в симметричной трёхфазной системе не применяют.

Установим соответствие между линейными и фазными напряжениями. Для этого рассмотрим векторную диаграмму напряжений (рисунок 3.7).

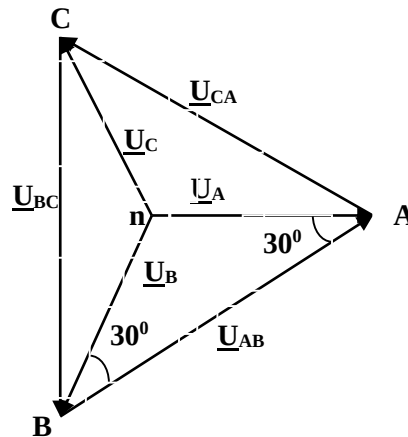


Рисунок 3.7 – Векторная диаграмма симметричного режима при соединении нагрузки в звезду

Из диаграммы имеем:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B = U_\phi - U_\phi * e^{-j120^\circ} = \sqrt{3} * U_\phi * e^{j30^\circ}. \quad (3.8)$$

Аналогично:

$$\underline{U}_{BC} = \sqrt{3} * U_\phi * e^{-j90^\circ}; \quad \underline{U}_{CA} = \sqrt{3} * U_\phi * e^{-j210^\circ}.$$

Следовательно, линейные напряжения при симметричном режиме в $\sqrt{3}$ раз больше фазных.

Из диаграммы видно, что векторная сумма линейных напряжений равна нулю:

$$\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA} = 0. \quad (3.9)$$

Из всего сказанного можно сделать вывод:

$$I_\phi = I_L; \quad (3.10)$$

$$U_L = \sqrt{3} * U_\phi. \quad (3.11)$$

3.5 Симметричный режим при соединении нагрузки треугольником

При соединении нагрузки треугольником (рисунок 3.8, а) система будет симметричной при $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{CA} = Z * e^{j\varphi}$. Векторная диаграмма данного режима работы приведена на рисунок 3.8, б).

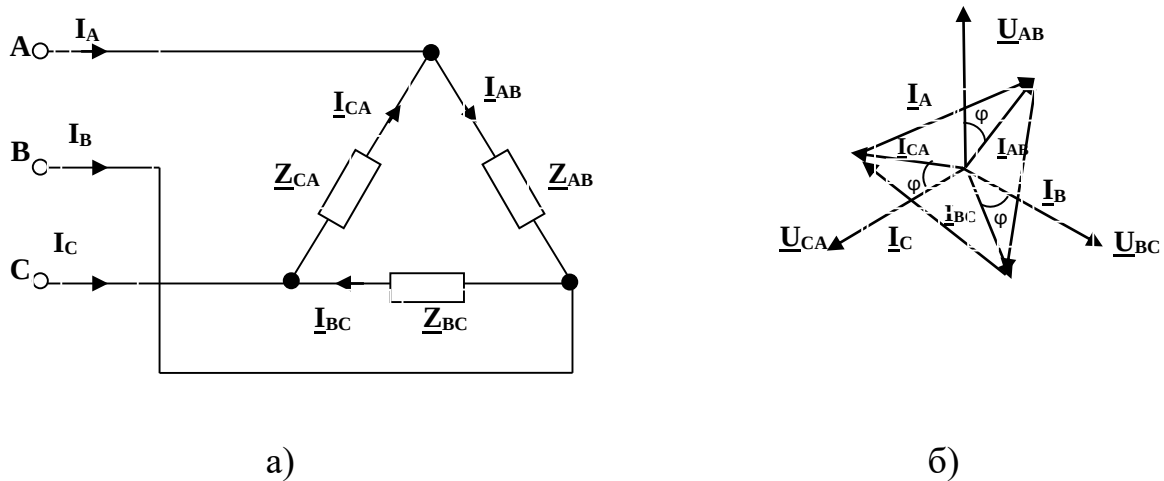


Рисунок 3.8 – Симметричный режим работы при соединении нагрузки в треугольник

Система фазных токов будет также симметричной, т. к.:

$$\underline{I}_{AB} + \underline{I}_{BC} + \underline{I}_{CA} = 0. \quad (3.12)$$

Выразим по первому правилу Кирхгофа линейные токи через фазные:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA};$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB};$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC}.$$

Складывая все три равенства можно получить тождество:

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0.$$

То есть, линейные токи образуют симметричную систему векторов.

Выразим линейные токи через фазные:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA} = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{AB} * e^{-j240^\circ} = \sqrt{3} * \underline{I}_{AB} * e^{-j30^\circ}.$$

Аналогично для других фаз.

Таким образом, при соединении симметричной нагрузки треугольником линейные и фазные токи будут одинаковы, а линейный ток в $\sqrt{3}$ раз больше фазного:

$$U_{\text{л}} = U_{\text{ф}}; \quad (3.13)$$

$$I_{\text{л}} = \sqrt{3} * I_{\text{ф}}. \quad (3.14)$$

3.6 Мощность симметричной трёхфазной системы

Определим суммарную мгновенную мощность трёхфазной цепи при симметричном режиме работы. Для этого выразим мгновенные мощности трёхфазной цепи:

$$\begin{aligned} p_A &= u_A * i_A = U_{\text{ф}} * \sqrt{2} * \sin \omega t * I_{\text{ф}} * \sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi) = \\ &= U_{\text{ф}} * I_{\text{ф}} * (\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)); \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} p_B &= u_B * i_B = U_{\text{ф}} * \sqrt{2} * \sin(\omega t - 120^\circ) * I_{\text{ф}} * \sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi - 120^\circ) = \\ &= U_{\text{ф}} * I_{\text{ф}} * (\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi - 240^\circ)); \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} p_C &= u_C * i_C = U_{\text{ф}} * \sqrt{2} * \sin(\omega t - 240^\circ) * I_{\text{ф}} * \sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi - 240^\circ) = \\ &= U_{\text{ф}} * I_{\text{ф}} * (\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi - 480^\circ)). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Суммарная мгновенная мощность определяется выражением:

$$p = p_A + p_B + p_C = 3 * U_{\text{ф}} * I_{\text{ф}} * \cos \varphi. \quad (3.18)$$

Вторые слагаемые формул (3.15) ... (3.17) дают в сумме ноль, т. к. образуют симметричную трёхфазную систему. Следовательно, мгновенная мощность симметричной трёхфазной цепи не зависит от времени и равна активной мощности цепи. Трёхфазная цепь, мгновенная мощность которой не изменяется с периода, называется уравновешенной. При несимметричном режиме работы трёхфазная цепь не будет уравновешенной, т. к. мгновенная мощность содержит переменную составляющую, изменяющуюся с двойной частотой.

Активная мощность трёхфазной цепи равна сумме активных мощностей отдельных приёмников, т. е. сумме активных мощностей фаз:

$$P = 3 * P_{\phi} = 3 * U_{\phi} * I_{\phi} * \cos \varphi. \quad (3.19)$$

Учитывая соотношения между фазными и линейными напряжениями и токами, полученными ранее, можем записать:

$$P = \sqrt{3} * U_{л} * I_{л} * \cos \varphi. \quad (3.20)$$

Аналогично определяются реактивная и полная мощности симметричной трёхфазной цепи:

$$Q = \sqrt{3} * U_{л} * I_{л} * \sin \varphi; \quad (3.21)$$

$$S = \sqrt{3} * U_{л} * I_{л}. \quad (3.22)$$

При этом следует иметь ввиду, что здесь φ – угол сдвига фаз между фазным напряжением и фазным током.

3.7 Несимметричный режим работы трёхфазной цепи при соединении нагрузки в звезду с нейтральным проводом

Наличие нейтрального провода без сопротивления означает, что каждая фаза может рассчитываться независимо от других. Эта особенность трёхфазной системы с нейтральным проводом обеспечивает неизменное напряжение на любой фазе нагрузки при изменении токов в других фазах.

Принимаем за исходную фазу А:

$$\underline{U}_A = U_{\phi}; \underline{U}_B = U_{\phi} * e^{-j120^0}; \underline{U}_C = U_{\phi} * e^{-j240^0}.$$

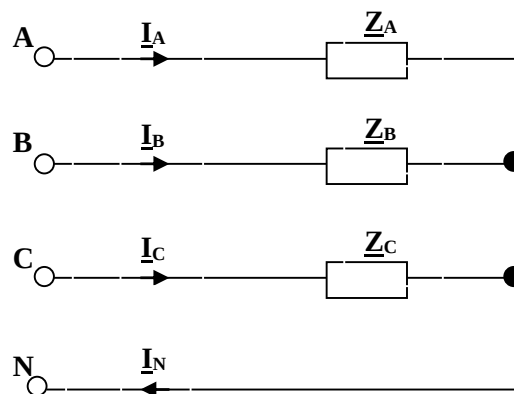


Рисунок 3.9 – Схема соединения нагрузки в звезду с нейтральным проводом

Тогда токи в фазах приёмника:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_A} ; \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}_B} ; \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_C}. \quad (3.23)$$

Ток в нейтральном проводе:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C. \quad (3.24)$$

Таким образом, за счёт нейтрального провода обеспечивается **симметрия фазных напряжений**. Поэтому однофазные потребители включают в четырёхпроводную сеть.

Векторная диаграмма, отражающая режим работы такой цепи, изображена на рисунке 3.10.

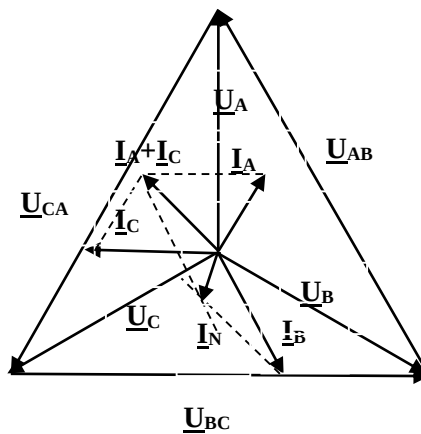


Рисунок 3.10 – Векторная диаграмма несимметричного режима работы схемы при соединении нагрузки в звезду с нейтральным проводом

3.8 Несимметричный режим работы трёхфазной цепи при соединении нагрузки в звезду без нейтрального провода

Отсутствие нейтрального провода при несимметрии нагрузки приводит к тому, что фазные напряжения становятся разными по модулю (так называемый «перекос фаз»). Поэтому первоначально необходимо произвести расчёт новых значений фазных напряжений. Более подробно последовательность расчётов выглядит следующим образом:

1. Расчёт комплексов проводимостей фаз:

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A}; \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B}; \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C}. \quad (3.25)$$

2. Расчёт напряжения смещения нейтрали:

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{U}_A * \underline{Y}_A + \underline{U}_B * \underline{Y}_B + \underline{U}_C * \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}. \quad (3.26)$$

3. Расчёт фазных напряжений при несимметричном режиме работы:

$$\underline{U}_{1A} = \underline{U}_A - \underline{U}_N; \underline{U}_{1B} = \underline{U}_B - \underline{U}_N; \underline{U}_{1C} = \underline{U}_C - \underline{U}_N. \quad (3.27)$$

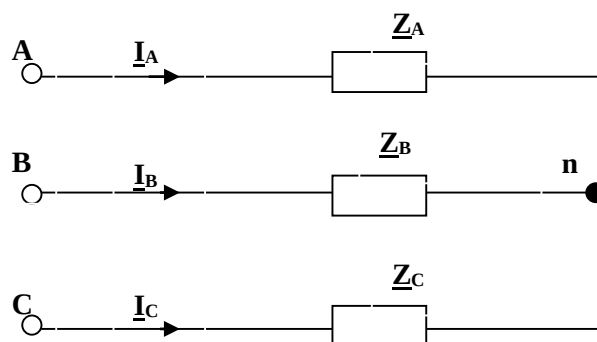


Рисунок 3.11 – Схема соединения нагрузки в звезду без нейтрального провода

4. Расчёт линейных токов по закону Ома:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{1A}}{\underline{Z}_A}; \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_{1B}}{\underline{Z}_B}; \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{1C}}{\underline{Z}_C}. \quad (3.28)$$

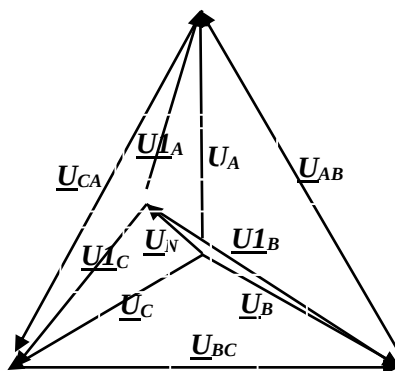


Рисунок 3.12 – Векторная диаграмма несимметричного режима работы схемы при соединении нагрузки в звезду без нейтрального провода

3.9 Несимметричный режим работы трёхфазной цепи при соединении нагрузки в треугольник

Фазные токи при несимметричной нагрузке определяют по закону Ома:

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}} ; \underline{I}_{BC} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}} ; \underline{I}_{CA} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}}. \quad (3.29)$$

На схеме (рисунок 3.13) за положительное направление фазных токов в треугольнике приняты направления от А к В, от В к С и от С к А.

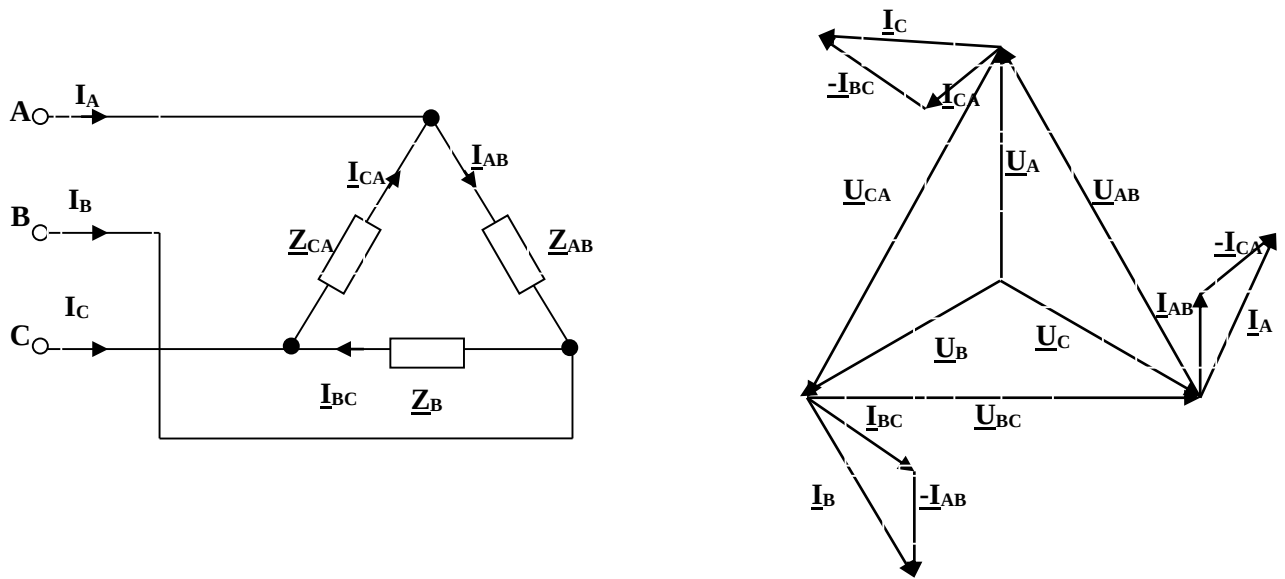


Рисунок 3.13 – Несимметричный режим работы при соединении нагрузки в треугольник

Линейные токи определяются по первому правилу Кирхгофа:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA}; \quad (3.30)$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB}; \quad (3.31)$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC}. \quad (3.32)$$

Проверить расчёт можно по тому же правилу:

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0. \quad (3.33)$$

При симметричной нагрузке фаз линейные токи в $\sqrt{3}$ раз больше фазных. При несимметричной нагрузке это соотношение не выполняется.

Расчёт и построение векторной диаграммы напряжений и векторной диаграммы токов в схеме на рисунке 3.13 выполняется следующим образом:

1. На комплексной плоскости строят векторную диаграмму фазных напряжений $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$.
2. Строят вектора линейных напряжений как разность соответствующих векторов фазных напряжений.
3. Определяют фазные токи по выражениям (3.29).
4. Определяют положение векторов $\underline{I}_{AB}, \underline{I}_{BC}, \underline{I}_{CA}$ на диаграмме. Их удобнее строить относительно векторов фазных напряжений.
5. Рассчитывают линейные токи по первому правилу Кирхгофа с помощью выражений (3.30) ... (3.32), выполняют графические сложения векторов с помощью данных равенств.

3.10 Мощности несимметричной трёхфазной цепи

Мощности фаз при несимметричной нагрузке неодинаковы, поэтому комплексная мощность несимметричной трёхфазной цепи определяется как сумма комплексных мощностей фаз:

$$\underline{S} = \underline{S}_A + \underline{S}_B + \underline{S}_C = \underline{U}_A * \underline{I}_A^* + \underline{U}_B * \underline{I}_B^* + \underline{U}_C * \underline{I}_C^*. \quad (3.34)$$

Активная мощность цепи равна сумме активной мощности фаз:

$$P = U_A * I_A * \cos \varphi_A + U_B * I_B * \cos \varphi_B + U_C * I_C * \cos \varphi_C. \quad (3.35)$$

Реактивная мощность равна сумме реактивных мощностей фаз:

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C = U_A * I_A * \sin \varphi_A + U_B * I_B * \sin \varphi_B + U_C * I_C * \sin \varphi_C. \quad (3.36)$$

Если нагрузка соединена в треугольник, то

$$\underline{S} = \underline{S}_{AB} + \underline{S}_{BC} + \underline{S}_{CA} = \underline{U}_{AB} * \underline{I}_{AB}^* + \underline{U}_{BC} * \underline{I}_{BC}^* + \underline{U}_{CA} * \underline{I}_{CA}^*; \quad (3.37)$$

$$P = U_{AB} * I_{AB} * \cos \varphi_{AB} + U_{BC} * I_{BC} * \cos \varphi_{BC} + U_{CA} * I_{CA} * \cos \varphi_{CA}; \quad (3.38)$$

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C = U_A * I_A * \sin \varphi_A + U_B * I_B * \sin \varphi_B + U_C * I_C * \sin \varphi_C; \quad (3.39)$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (3.40)$$

3.11 Измерение мощности в трёхфазных цепях

Показания ваттметра можно определить по формулам:

$$P = U_{AB} * I * \cos(\widehat{U_{AB} I}); P = \operatorname{Re}(U_{AB} * \underline{I}^*), \quad (3.41)$$

где $\underline{U}_{AB}$ и $\underline{I}$ – комплексы действующих напряжений и тока, на которые включён ваттметр (угол φ – угол сдвига фаз между положительными направлениями векторов $\underline{U}_{AB}$ и $\underline{I}$).

Измерение активной мощности при симметричной нагрузке

У симметричного трёхфазного приёмника мощности всех фаз одинаковы, поэтому достаточно измерить активную мощность P_ϕ одной фазы. Активная мощность приёмника при этом $P = 3 * P_\phi$. На рисунке 3.14 показано включение ваттметра для измерения мощности фазы А приёмника, соединённого звездой с доступной нейтральной точкой. Если симметричный приёмник соединён треугольником, то мощность одной фазы измеряют по схеме, приведённой на рисунке 3.15.

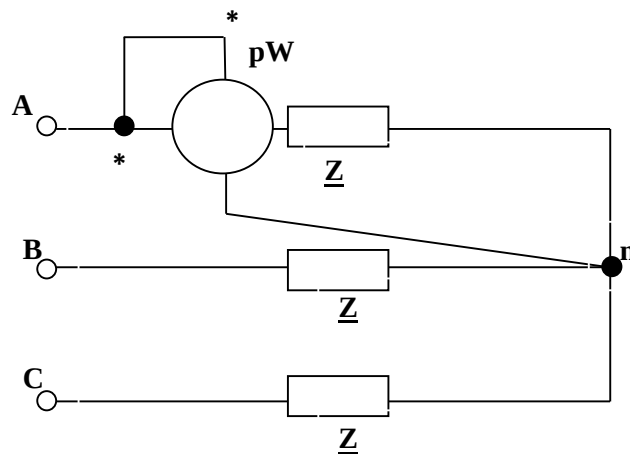


Рисунок 3.14 – Схема включения ваттметра при измерении активной мощности в цепи с симметричной нагрузкой при соединении в звезду

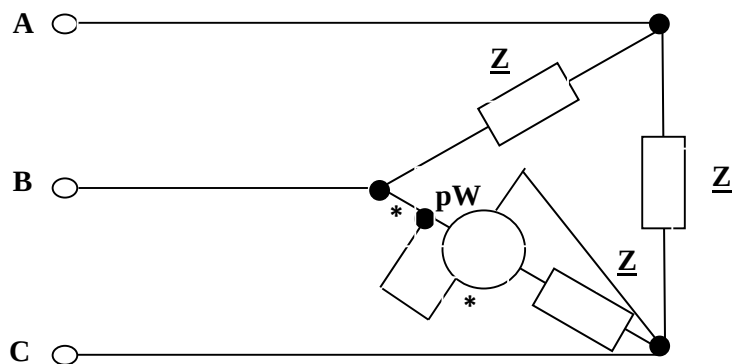


Рисунок 3.15 – Схема включения ваттметра при измерении активной мощности в цепи с симметричной нагрузкой при соединении в треугольник

Если нейтральная точка приёмника недоступна, то создают искусственную нейтральную точку из трёх резисторов, один из которых R_d является добавочным. Его сопротивление вместе с сопротивлением обмотки напряжения ваттметра R_w должно равняться сопротивлению двух других фаз: $R = R_d + R_w$ (рисунок 3.16).

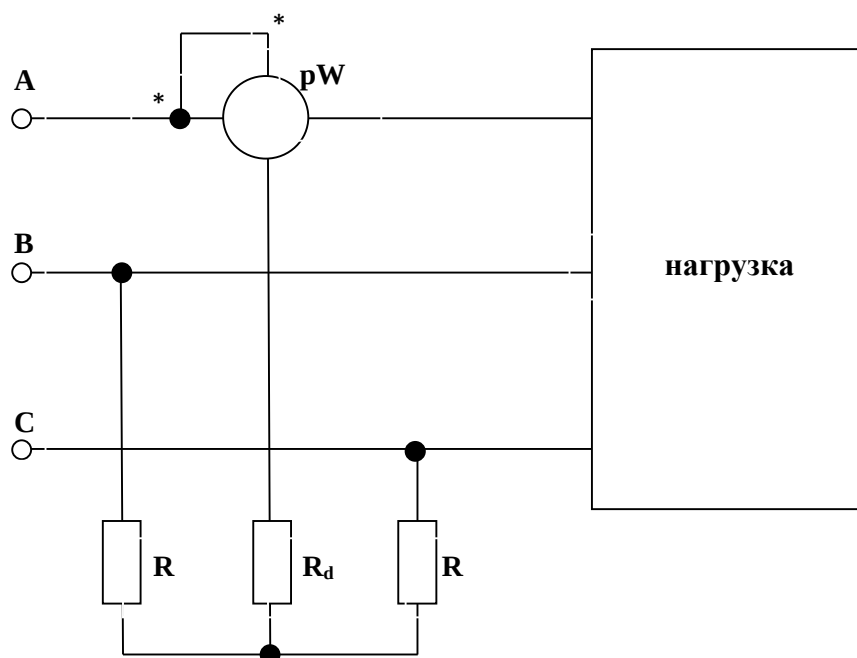


Рисунок 3.16 – Схема включения ваттметра при измерении активной мощности в цепи с симметричной нагрузкой при недоступной нейтральной точки приёмника

Суммарная активная мощность в этом случае равна утроенному значению мощности, показываемому одним ваттметром.

Измерение активной мощности при несимметричной нагрузке

Мощности фаз при несимметричной нагрузке не одинаковы. Поэтому для измерения мощности трёхфазного приёмника, соединённого звездой с нейтральным проводом необходимо включить ваттметр в каждую фазу (рисунок 3.17). При любом характере нагрузки активная мощность всей системы определяется как сумма показателей трёх ваттметров:

$$P = P_A + P_B + P_C = U_A * I_A * \cos \varphi_A + U_B * I_B * \cos \varphi_B + U_C * I_C * \cos \varphi_C. \quad (3.42)$$

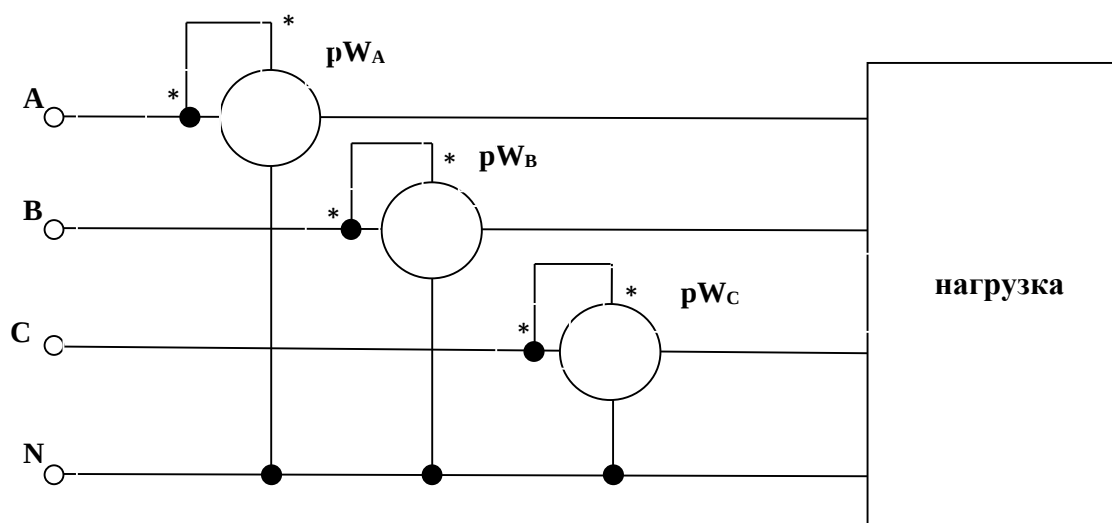


Рисунок 3.17 – Схема включения ваттметра при измерении активной мощности в цепи с несимметричной нагрузкой в четырёхпроводной линии

В трёхфазных трёхпроводных системах мощность несимметричного приёмника в большинстве случаев измеряют двумя ваттметрами (рисунок 3.18).

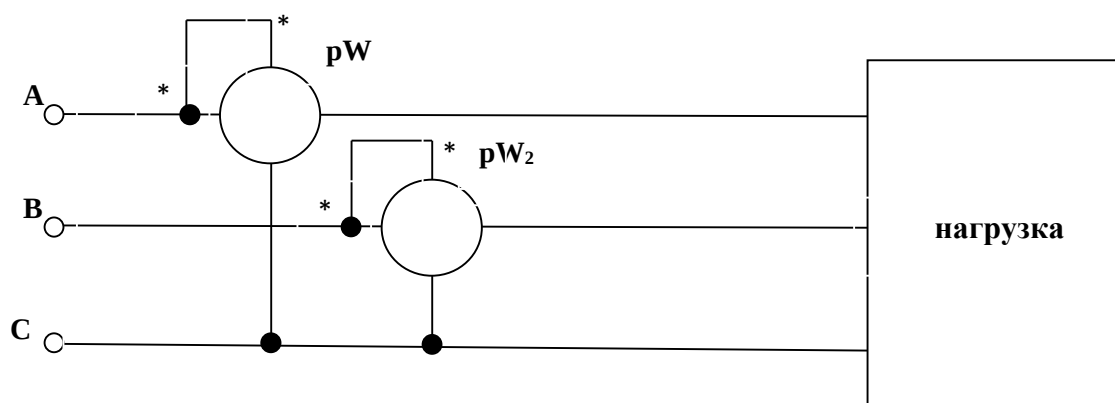


Рисунок 3.18 – Схема включения ваттметра при измерении активной мощности в цепи с несимметричной нагрузкой в трёхпроводной линии

Выразим мгновенную мощность системы через мгновенные значения напряжений и токов:

$$p = u_A * i_A + u_B * i_B + u_C * i_C. \quad (3.43)$$

При соединении фаз приёмника без нейтрального провода:

$$i_A + i_B + i_C = 0 \text{ или } i_C = -(i_A + i_B). \quad (3.44)$$

Подставив ток i_C в (3.33), получим:

$$p = (u_A - u_C) * i_A + (u_B - u_C) * i_B = u_{AC} * i_A + u_{BC} * i_B. \quad (3.45)$$

Следовательно, мгновенная мощность трёхфазной цепи равна сумме двух произведений мгновенных значений линейных напряжений и токов. Поэтому сумма средних значений этих двух произведений, т. е. активная мощность системы может быть измерена двумя ваттметрами:

$$P = P_1 + P_2 = U_{AC} * I_A * \cos \alpha_1 + U_{BC} * I_B * \cos \alpha_2, \quad (3.46)$$

где α_1 – угол сдвига фаз между линейным напряжением U_{AC} и током I_A ; α_2 – угол сдвига фаз между линейным напряжением U_{BC} и током I_B .

Таким образом, складывая показания двух ваттметров, включённых по схеме (рисунок 3.18), получаем активную мощность трёхфазной цепи. При этом каждая из мощностей P_1 и P_2 отдельно никакой реальной мощности не отображает.

Измерение реактивной мощности

На рисунке 3.19 приведена схема включения ваттметра для измерения реактивной мощности симметричной трёхфазной цепи. Показание ваттметра определяется:

$$P_1 = U_{BC} * I_A * \cos(\underline{U}_{BC}, \underline{I}_A). \quad (3.47)$$

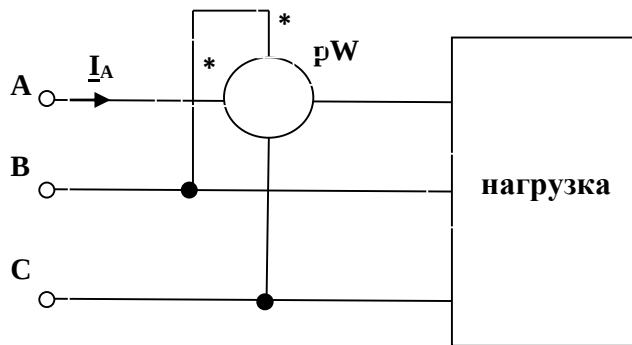


Рисунок 3.19 – Схема включения ваттметра при измерении реактивной мощности при симметричной нагрузке

Чтобы определить угол между векторами $\underline{U}_{BC}$ и $\underline{I}_A$, построим векторную диаграмму (рисунок 3.20). Из неё видно, что этот угол равен $(90^\circ - \varphi)$.

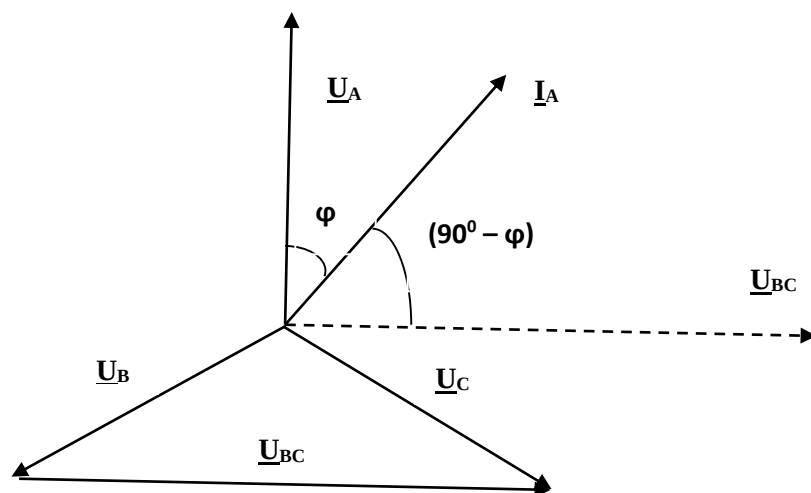


Рисунок 3.20 – Векторная диаграмма для расчёта реактивной мощности при симметричной нагрузке

Тогда

$$P_1 = U_{BC} * I_A * \cos(90^\circ - \varphi) = U_{BC} * I_A * \sin \varphi. \quad (3.48)$$

Реактивная мощность:

$$Q = \sqrt{3} * U_{BC} * I_A * \sin \varphi = \sqrt{3} * P_1. \quad (3.49)$$

Следовательно, реактивная мощность определяется умножением показаний ваттметра на $\sqrt{3}$.

3.12 Примеры расчёта трёхфазных цепей

Задача 1

1. В симметричном режиме определить токи и напряжения на всех участках цепи.
2. Построить векторную диаграмму токов и напряжений.
3. Определить активную и реактивную мощность цепи.
4. Методом двух ваттметров определить активную мощность на входе цепи. Проверить баланс активных мощностей.
5. Нарисовать схему цепи и рассчитать токи и напряжения в случае обрыва одного из линейных проводов (Аа, Вв или Сс). Построить векторные диаграммы.
6. Нарисовать схему цепи и рассчитать токи и напряжения в случае короткого замыкания одной из фаз нагрузки. Построить векторные диаграммы.

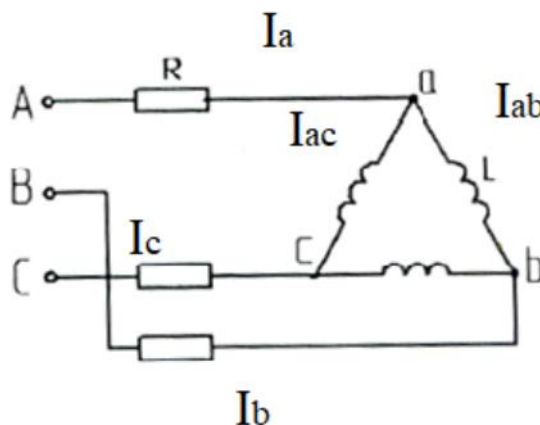
Дано:

$U_{\text{л}} = 380 \text{ В};$

$f = 50 \text{ Гц};$

$R = 35 \text{ Ом};$

$L = 150 \text{ мГн}$



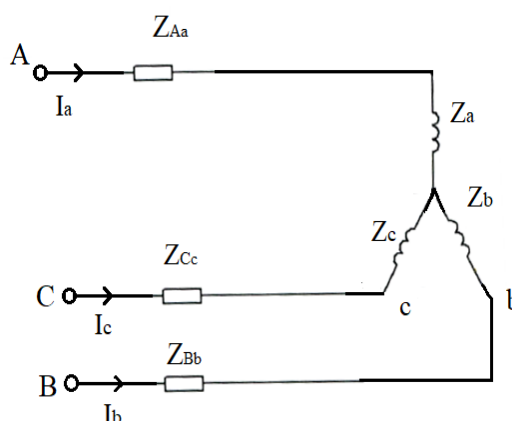
$I_i - ?$

1) Найдем полное сопротивление фаз и линий:

$$Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ca} = jX_L = j2\pi fL = j \times 3,14 \times 50 \times 150 \times 10^{-3} = \\ = j 47,1 \text{ Ом} = 47,1 e^{j90};$$

$$Z_{Aa} = Z_{Bb} = Z_{Cc} = R = 35 \text{ Ом}.$$

2) Преобразуем схему соединения «треугольник» в «звезду»:



Определим фазы напряжений:

$$\dot{U}_A = \frac{U_A}{\sqrt{3}} e^{j0} = 220 e^{j0};$$

$$\dot{U}_B = \dot{U}_A e^{-j120} = 220 e^{-j120};$$

$$\dot{U}_C = \dot{U}_A e^{j120} = 220 e^{j120}.$$

Тогда

$$Z_A = Z_B = Z_C = \frac{Z_{ab} \cdot Z_{ba}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} = \frac{(Z_{ab})^2}{3Z_{ab}} = \frac{Z_{ab}}{3} = \frac{47,1 e^{j90}}{3} = 15,7 e^{j90}.$$

3) Найдем токи в цепи, соединенной по схеме «звезда» (Y)

$$I_A = \frac{\dot{U}}{Z_{Aa} + Z_a} = \frac{220 e^{j0}}{35 + j15,7} = \frac{220 e^{j0}}{38,56 e^{j24}} = 5,74 e^{-j24} \text{ A};$$

$$I_B = I_A e^{-j120} = 5,74 e^{-j24} \cdot e^{-j120} = 5,74 e^{-j144} \text{ A};$$

$$I_C = I_A e^{j120} = 5,74 e^{-j24} \cdot e^{j120} = 5,74 e^{-j96} \text{ A}.$$

4) Найдем линейные напряжения на фазах приемника:

$$\dot{U}_{ab} = Z_A \cdot I_A - Z_b \cdot I_b = 52,03 e^{j96} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{bc} = \dot{U}_{ab} \cdot e^{-j120} = 52,03e^{-j24} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{ca} = \dot{U}_{ab} \cdot e^{j120} = 52,03e^{j216} \text{ В}.$$

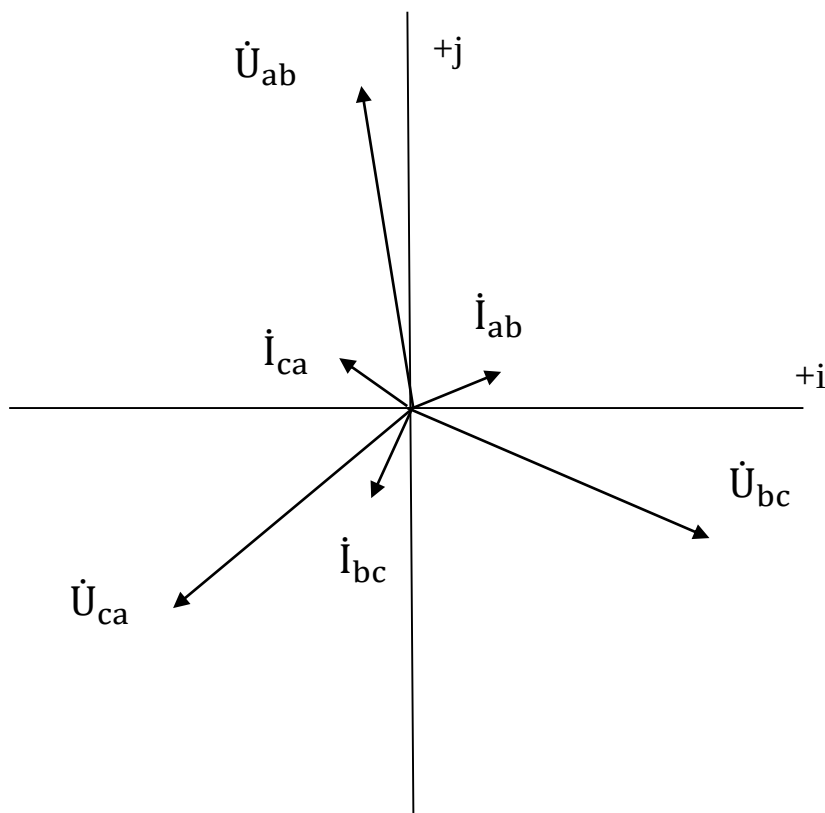
5) Найдем токи в цепи, соединенной по схеме «треугольник» (Δ):

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z_{ab}} = \frac{52,03e^{j96}}{47,1e^{j90}} = 1,1e^{j6} \text{ А};$$

$$\dot{I}_{bc} = \dot{I}_{ab}e^{-j120} = 1,1e^{-j114} \text{ А};$$

$$\dot{I}_{bc} = \dot{I}_{ab}e^{j120} = 1,1e^{j126} \text{ А}.$$

6) Построим векторную диаграмму токов и напряжений:

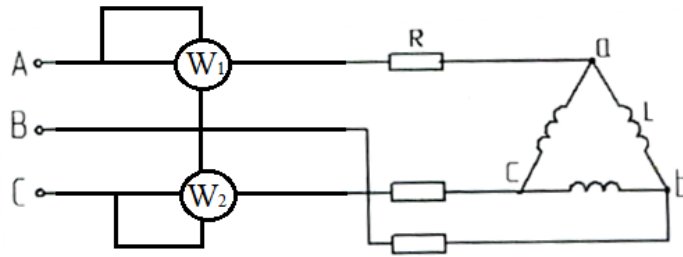


7) Определим активную и реактивную мощность цепи:

$$\sum P_{\text{потр}} = 3 \cdot P = 3 \cdot I_A^2 \cdot R_A = 3 \cdot (5,74)^2 \cdot 35 = 3459,6 \text{ Вт};$$

$$\sum Q = 3Q = 3 \cdot I_{ab}^2 \cdot X_L = 3 \cdot (1,1)^2 \cdot 47,1 = 155,43 \text{ Вт}.$$

8) Определим активную мощность на входе цепи методом двух ваттметров:



$$\sum P_{\text{ист}} = P_{W1} + P_{W2} = 1282,1 + 2169,3 = 3451,1 \text{ Вт};$$

$$P_{W1} = I_A \cdot U_{AB} \cdot \cos(\angle(I_A U_{AB})) = 5,74 \cdot 380 \cdot \cos(-24 - 30) = 1282,1 \text{ Вт};$$

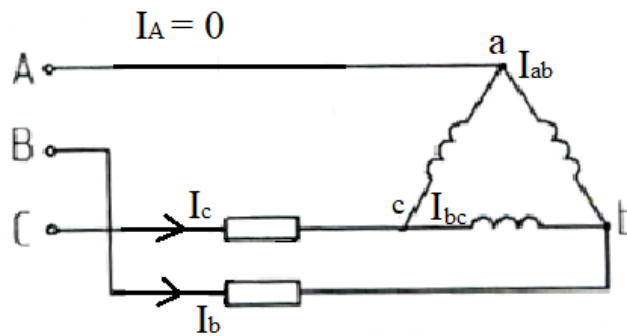
$$P_{W2} = I_C \cdot U_{CB} \cdot \cos(\angle(I_C U_{CB})) = 5,74 \cdot 380 \cdot \cos(96 + 90) = 2169,3 \text{ Вт}.$$

Сравним полученные $\sum P_{\text{потр}}$ и $\sum P_{\text{ист}}$:

$$\delta = \frac{|\sum P_{\text{потр}} - \sum P_{\text{ист}}|}{\sum P_{\text{ист}}} = \frac{|3459,6 - 3451,1|}{3451,1} \cdot 100\% = 0,2\%.$$

Баланс сходится.

9) Обрыв линейного провода:



$$\dot{I}_{ab} = \dot{I}_{ab} = -\frac{\dot{U}_{bc}}{Z_{ab} + Z_{ca}} = -\frac{52,03e^{-j24}}{j47,1 + j47,1} = -0,55e^{-j114} \text{ А};$$

$$\dot{U}_{ab} = Z_{ab} \cdot \dot{I}_{ab} = 47,1e^{j90} \cdot (-0,55e^{-j114}) = 25,91e^{-j24} \text{ А};$$

$$\dot{U}_{ca} = Z_{ca} \cdot \dot{I}_{ca} = 25,91e^{-j24} \text{ А}.$$

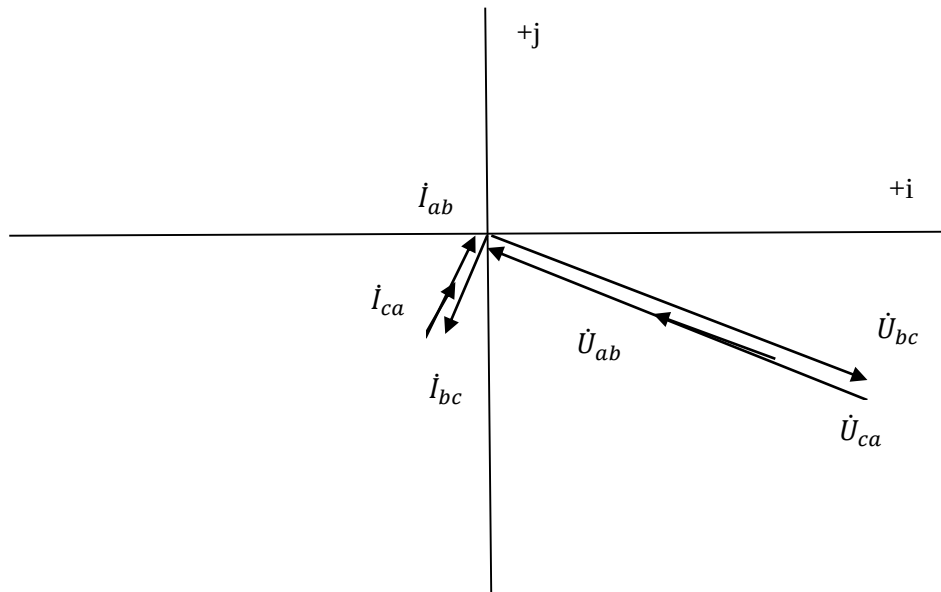
Ток фазы bc не меняется по сравнению с нормальным режимом:

$$\dot{I}_{bc} = 1,1e^{-j114} \text{ А};$$

$$\dot{I}_b = -\dot{I}_c = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab} = 1,1e^{-j114} - 0,55e^{-j114} =$$

$$= 1,65e^{-j66} \text{ A.}$$

10) Построим векторную диаграмму токов и напряжений:



Задача 2

Для заданной трехфазной цепи требуется:

- 1) в симметричном режиме определить токи и напряжения на всех элементах цепи;
- 2) построить векторную диаграмму токов и напряжений;
- 3) определить активную и реактивную мощности цепи;
- 4) методом двух ваттметров определить активную мощность на входе цепи. проверить баланс активных мощностей;
- 5) нарисовать схему цепи и рассчитать токи и напряжения в случае обрыва одного из линейных проводов, построить векторные диаграммы;
- 6) нарисовать схему цепи и рассчитать токи и напряжения в случае короткого замыкания одной из фаз нагрузки, построить векторные диаграммы.

Схема электрической цепи изображена на рисунке 3.21, исходные данные приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Исходные данные к задаче

№варианта	$U_{\text{Л}}, \text{В}$	$f, \text{Гц}$	$R, \text{Ом}$	$L, \text{мГн}$	$C, \text{мкФ}$
95	380	50	30	50	150

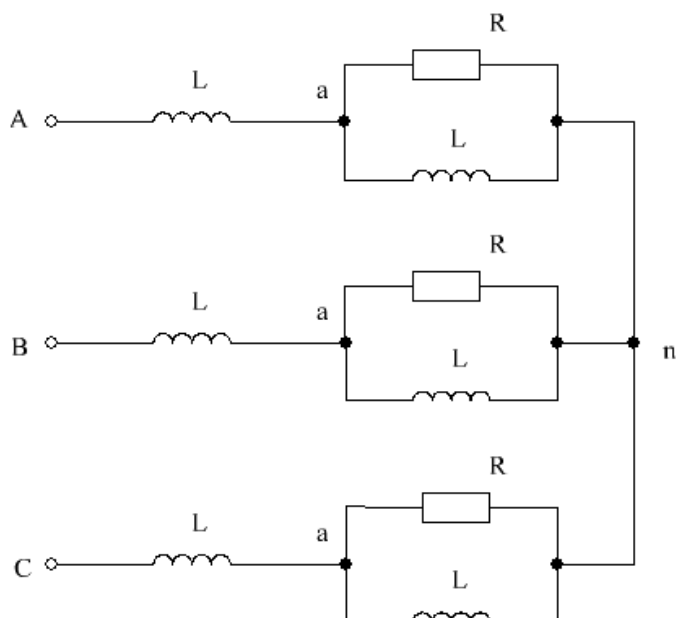


Рисунок 3.21 – Схема электрической цепи

Решение:

1. Расчетная схема трехфазной электрической цепи приведена на рисунке 3.22. На схеме обозначены линейные токи трехфазной системы и фазные токи нагрузки.

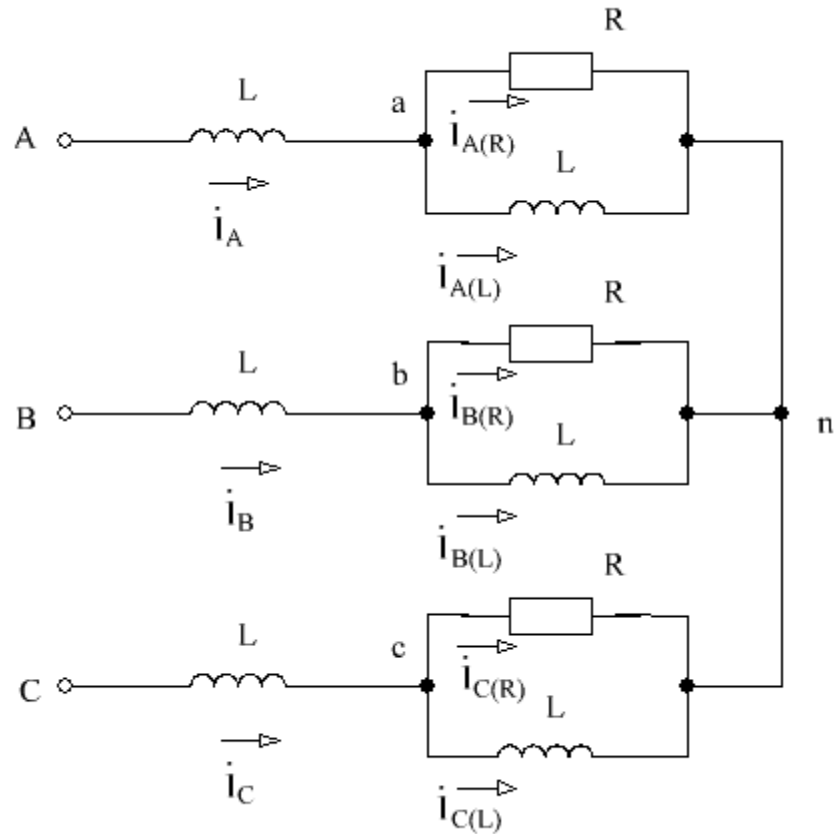


Рисунок 3.22 – Расчетная схема электрической цепи

2. Запишем в комплексном виде фазные и линейные напряжения источника:

– фазные напряжения:

$$\dot{U}_A = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 219,393 \text{ В};$$

$$\dot{U}_B = \dot{U}_A e^{-j120^\circ} = 219,393 e^{-j120^\circ} = -109,697 - j190 \text{ В};$$

$$\dot{U}_C = \dot{U}_A e^{j120^\circ} = 219,393 e^{j120^\circ} = -109,697 + j190 \text{ В}.$$

– линейные напряжения:

$$\dot{U}_{AB} = \sqrt{3} \dot{U}_A e^{j30^\circ} = 380 e^{j(0^\circ+30^\circ)} = 380 e^{j30^\circ} = 329,09 + j190 \text{ В};$$

$$\dot{U}_{BC} = \sqrt{3} \dot{U}_B e^{j30^\circ} = 380 e^{j(-120^\circ+30^\circ)} = 380 e^{-j90^\circ} = -j380 \text{ В};$$

$$\dot{U}_{CA} = \sqrt{3} \dot{U}_C e^{j30^\circ} = 380 e^{j(120^\circ+30^\circ)} = 380 e^{j150^\circ} = -329,09 + j190 \text{ В}.$$

3. Определим реактивные сопротивления элементов цепи:

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi \cdot 50 \cdot 50 \times 10^{-3} = 15,708 \text{ Ом.}$$

4. Запишем в комплексном виде сопротивления фаз приемника:

$$\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = \frac{jX_L R}{jX_L + R} = \frac{j15,708 \cdot 30}{j15,708 + 30} = 6,455 + j12,328 = 13,916e^{j62,4^\circ} \text{ Ом.}$$

5. Определим линейные токи трехфазной системы:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{jX_L + \underline{Z}_a} = \frac{219,393}{j15,708 + 6,455 + j12,328} = 7,626e^{-j77^\circ} = 1,711 - j7,431 \text{ А;}$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{jX_L + \underline{Z}_b} = \frac{219,393e^{-j120^\circ}}{j15,708 + 6,455 + j12,328} = 7,626e^{j163^\circ} = -7,291 + j2,234 \text{ А;}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{jX_L + \underline{Z}_c} = \frac{219,393e^{j120^\circ}}{j15,708 + 6,455 + j12,328} = 7,626e^{j43^\circ} = 5,58 + j5,197 \text{ А.}$$

6. Определим фазные напряжения приемника:

$$\dot{U}_a = \dot{I}_A \underline{Z}_a = 7,626e^{-j77^\circ} \cdot 13,916e^{j62,4^\circ} = 106,12e^{-j14,7^\circ} = 102,66 - j26,876 \text{ В;}$$

$$\dot{U}_b = \dot{I}_B \underline{Z}_b = 7,626e^{j163^\circ} \cdot 13,916e^{j62,4^\circ} = 106,12e^{-j134,7^\circ} = -74,606 - j75,468 \text{ В;}$$

$$\dot{U}_c = \dot{I}_C \underline{Z}_c = 7,626e^{j43^\circ} \cdot 13,916e^{j62,4^\circ} = 106,12e^{j105,3^\circ} = -28,055 + j102,345 \text{ В.}$$

7. Определим фазные токи нагрузки:

$$\dot{I}_{aR} = \frac{\dot{U}_a}{R} = \frac{106,12e^{-j14,7^\circ}}{30} = 3,537e^{-j14,7^\circ} = 3,422 - j0,896 \text{ А;}$$

$$\dot{I}_{aL} = \frac{\dot{U}_a}{jX_L} = \frac{106,12e^{-j14,7^\circ}}{15,708e^{j90^\circ}} = 6,756e^{-j104,7^\circ} = -1,711 - j6,536 \text{ А;}$$

$$\dot{I}_{bR} = \frac{\dot{U}_b}{R} = \frac{106,12e^{-j134,7^\circ}}{30} = 3,537e^{-j134,7^\circ} = -2,487 - j2,516 \text{ А;}$$

$$\dot{I}_{bL} = \frac{\dot{U}_b}{jX_L} = \frac{106,12e^{-j134,7^\circ}}{15,708e^{j90^\circ}} = 6,756e^{j135,3^\circ} = -4,804 + j4,75 \text{ А;}$$

$$\dot{I}_{cR} = \frac{\dot{U}_c}{R} = \frac{106,12e^{j105,3^\circ}}{30} = 3,537e^{j105,3^\circ} = -0,935 + j3,411 \text{ А;}$$

$$\dot{I}_{cL} = \frac{\dot{U}_c}{jX_L} = \frac{106,12e^{j105,3^\circ}}{15,708e^{j90^\circ}} = 6,756e^{j15,3^\circ} = 6,515 + j1,786 \text{ А.}$$

Активная мощность:

$$P = P_a + P_b + P_c = 3I_{aR}^2 \cdot R = 3 \cdot 3,537^2 \cdot 30 = 1126,148 \text{ Вт}.$$

Реактивная мощность:

$$Q = 3I_A^2 \cdot X_L + 3I_{aL}^2 \cdot X_L = 3 \cdot 7,626^2 \cdot 15,708 + 3 \cdot 6,756^2 \cdot 15,708 = 4891,22 \text{ вар}.$$

11. Методом двух ваттметров определим активную мощность на входе цепи.

Схема включения ваттметров изображена на рисунке 3.24.

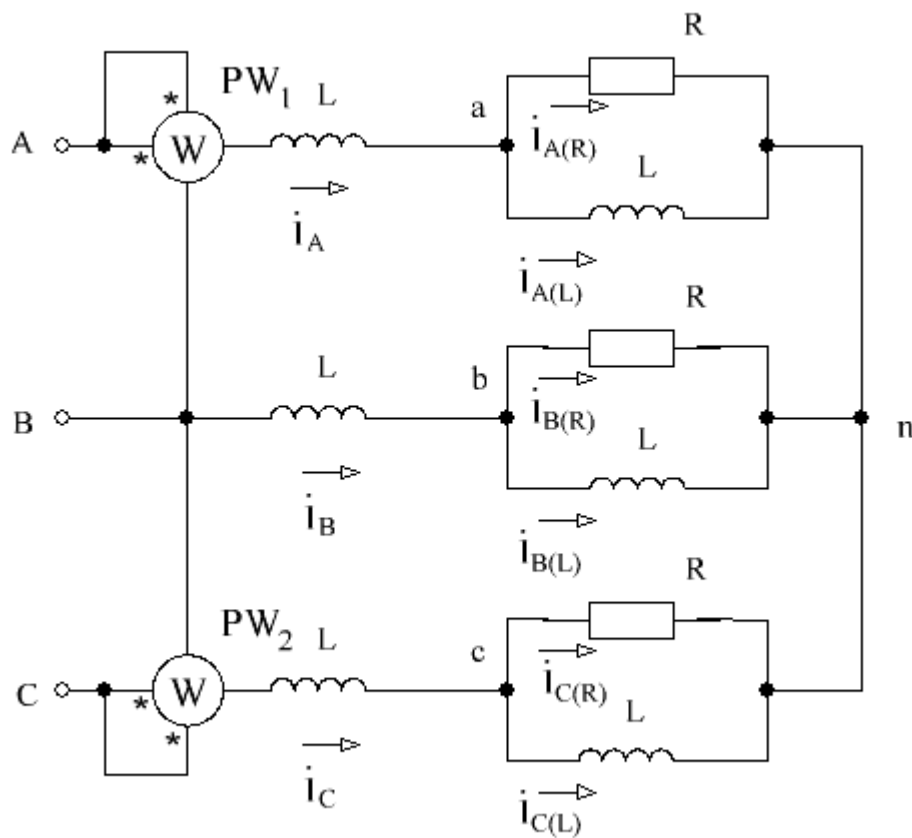


Рисунок 3.24 – Схема подключения ваттметров к электрической цепи

$$P_W = PW_1 + PW_2 = \operatorname{Re} \left[\dot{U}_{AB} \cdot I_A^* \right] + \operatorname{Re} \left[\dot{U}_{CB} \cdot I_C^* \right] = \operatorname{Re} \left[380e^{j30^\circ} \cdot 7,626e^{j77^\circ} \right] + \\ + \operatorname{Re} \left[380e^{j90^\circ} \cdot 7,626e^{-j43^\circ} \right] = 1126,148 \text{ Вт},$$

где

$$\dot{U}_{CB} = \dot{U}_C - \dot{U}_B = -109,697 + j190 - (-109,697 - j190) = j380 = 380e^{j90^\circ} \text{ В}.$$

Таким образом, активная мощность на входе трехфазной цепи, измеренная методом двух ваттметров, равна потребляемой приемниками активной мощности, которая была рассчитана в п. 10, следовательно, баланс активной мощности соблюдается.

12. Рассчитаем токи и напряжения в случае обрыва линейного провода Aa и построим векторные диаграммы токов и напряжений.

Схема электрической цепи при обрыве линейного провода Aa изображена на рисунке 3.25.

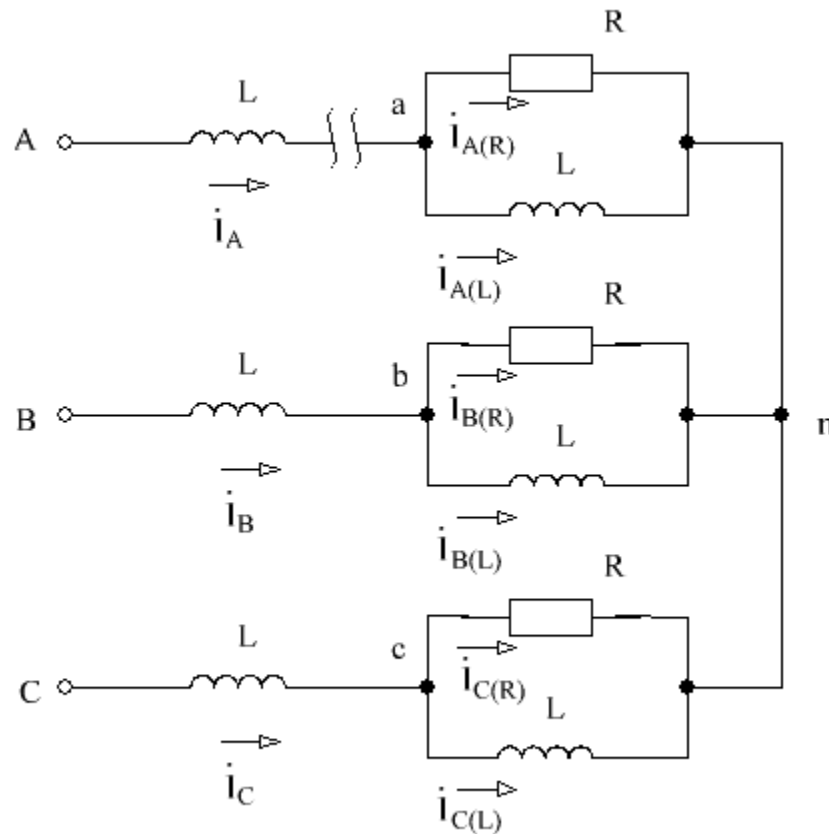


Рисунок 3.25 – Схема электрической цепи при обрыве линейного провода Aa

В рассматриваемом режиме: $\dot{I}_A = 0$.

Определим напряжение смещения нейтрали:

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\frac{\dot{U}_B}{jX_L + \underline{Z}_b} + \frac{\dot{U}_C}{jX_L + \underline{Z}_c}}{\frac{1}{jX_L + \underline{Z}_b} + \frac{1}{jX_L + \underline{Z}_c}} = \frac{\frac{219,393e^{-j120^\circ}}{j15,708 + 6,455 + j12,328} + \frac{219,393e^{j120^\circ}}{j15,708 + 6,455 + j12,328}}{\frac{1}{j15,708 + 6,455 + j12,328} + \frac{1}{j15,708 + 6,455 + j12,328}} =$$

$$= -109,697 \text{ B.}$$

Определим линейные токи $\dot{I}_B$ и $\dot{I}_C$ трехфазной системы:

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B - \dot{U}_{nN}}{jX_L + \underline{Z}_b} = \frac{219,393e^{-j120^\circ} - (-109,697)}{j15,708 + 6,455 + j12,328} = 6,604e^{-j167^\circ} = -6,436 - j1,482 \text{ A};$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C - \dot{U}_{nN}}{jX_L + \underline{Z}_b} = \frac{219,393e^{j120^\circ} - (-109,697)}{j15,708 + 6,455 + j12,328} = 6,604e^{j13^\circ} = 6,436 + j1,482 \text{ A}.$$

Определим фазные напряжения приемника:

$$\dot{U}_a = 0 \text{ B};$$

$$\dot{U}_b = \dot{I}_B \underline{Z}_b = 6,604e^{-j167^\circ} \cdot 13,916e^{j62,4^\circ} = 91,903e^{-j104,7^\circ} = -23,276 - j88,906 \text{ B};$$

$$\dot{U}_c = \dot{I}_C \underline{Z}_c = 6,604e^{j13^\circ} \cdot 13,916e^{j62,4^\circ} = 91,903e^{j75,3^\circ} = 23,276 + j88,906 \text{ B}.$$

Определим фазные токи нагрузки:

$$\dot{I}_{aR} = 0 \text{ A};$$

$$\dot{I}_{aL} = 0 \text{ A};$$

$$\dot{I}_{bR} = \frac{\dot{U}_b}{R} = \frac{91,903e^{-j104,7^\circ}}{30} = 3,063e^{-j104,7^\circ} = -0,776 - j2,964 \text{ A};$$

$$\dot{I}_{bL} = \frac{\dot{U}_b}{jX_L} = \frac{91,903e^{-j104,7^\circ}}{15,708e^{j90^\circ}} = 5,851e^{j165,3^\circ} = -5,66 + j1,482 \text{ A};$$

$$\dot{I}_{cR} = \frac{\dot{U}_c}{R} = \frac{91,903e^{j75,3^\circ}}{30} = 3,063e^{j75,3^\circ} = 0,776 + j2,964 \text{ A};$$

$$\dot{I}_{cL} = \frac{\dot{U}_c}{jX_L} = \frac{91,903e^{j75,3^\circ}}{15,708e^{j90^\circ}} = 5,851e^{-j14,7^\circ} = 5,66 - j1,482 \text{ A}.$$

Определим потерю напряжения в линиях трехфазной системы:

$$\dot{U}_{aL} = 0 \text{ B};$$

$$\dot{U}_{bL} = \dot{I}_B jX_L = 6,604e^{-j167^\circ} \cdot 15,708e^{j90^\circ} = 103,738e^{-j77^\circ} = 23,276 - j101,094 \text{ B};$$

$$\dot{U}_{cL} = \dot{I}_C jX_L = 6,604e^{j13^\circ} \cdot 15,708e^{j90^\circ} = 103,738e^{j103^\circ} = -23,276 + j101,094 \text{ В.}$$

Векторная диаграмма токов и напряжений при обрыве линейного провода *Aa* изображена на рисунке 3.26.

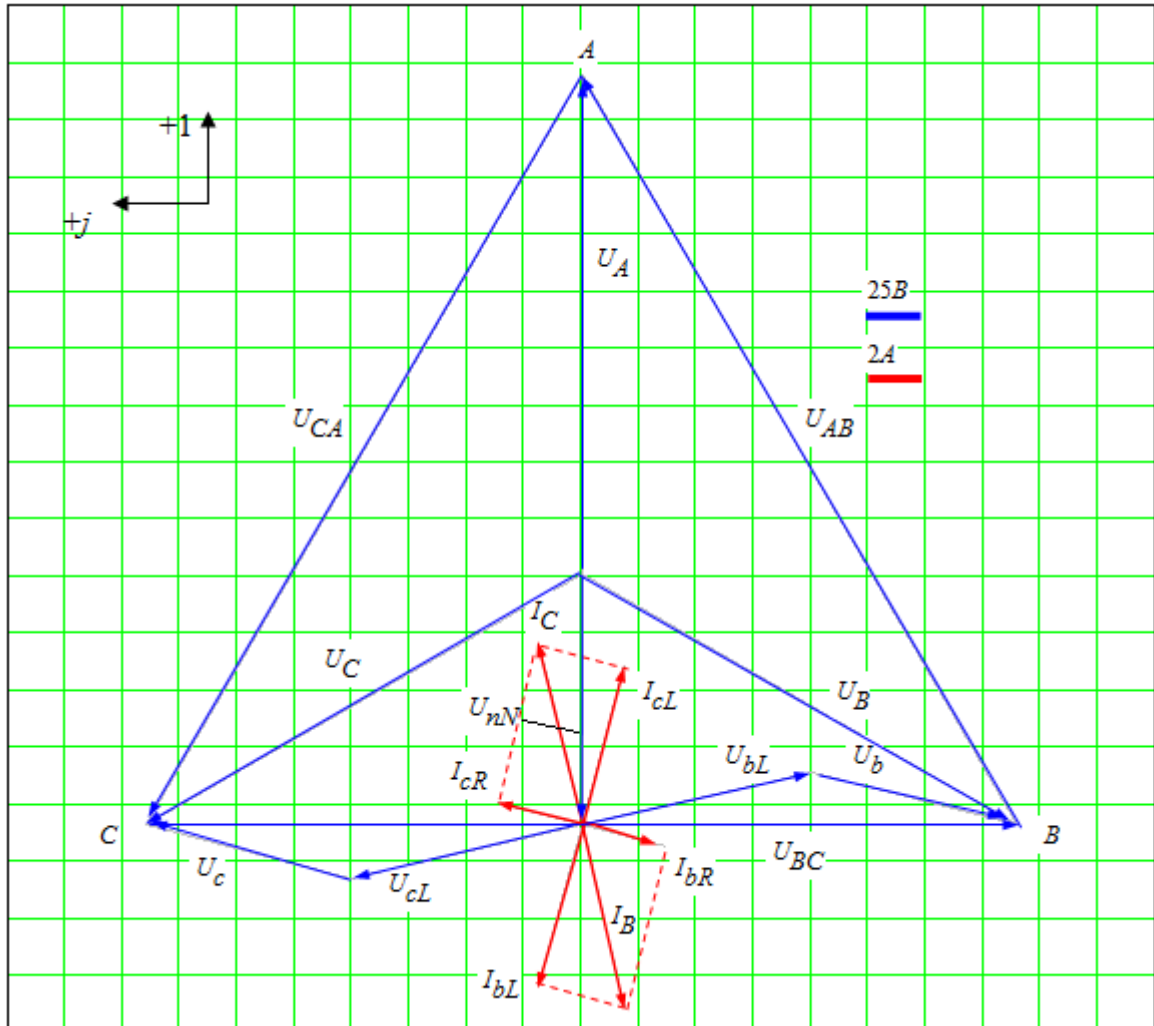


Рисунок 3.26 – Векторная диаграмма токов и напряжений

13. Рассчитаем токи и напряжения в случае короткого замыкания фазы *an* приемника и построим векторные диаграммы токов и напряжений. Схема электрической цепи при коротком замыкании фазы *an* приемника изображена на рисунке 3.27.

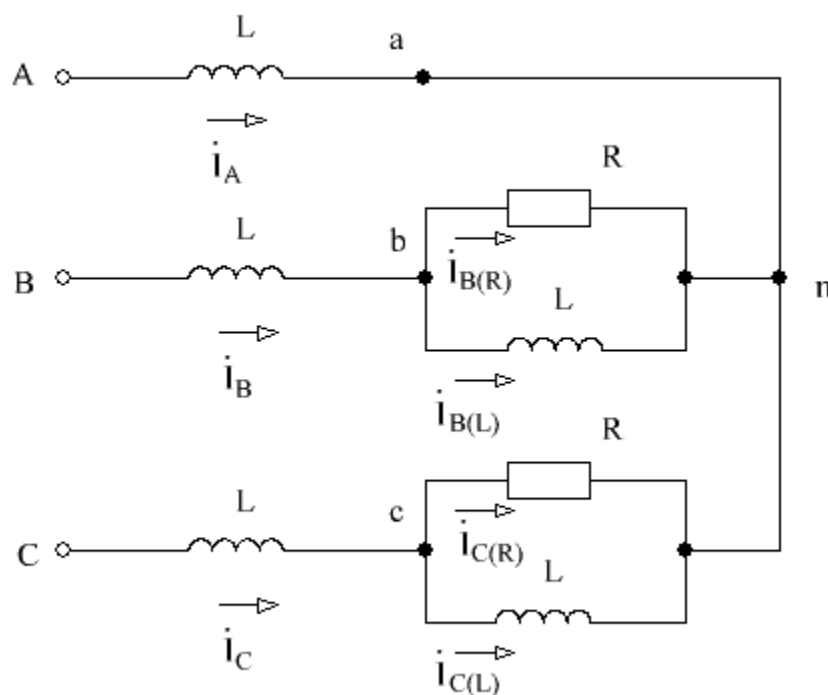


Рисунок 3.27 – Схема электрической цепи при коротком замыкании фазы *an*

В рассматриваемом режиме: $\dot{U}_a = 0$, $\underline{Z}_a = 0$.

Определим напряжение смещения нейтрали:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{nN} &= \frac{\frac{\dot{U}_A}{jX_L} + \frac{\dot{U}_B}{jX_L + \underline{Z}_b} + \frac{\dot{U}_C}{jX_L + \underline{Z}_c}}{\frac{1}{jX_L} + \frac{1}{jX_L + \underline{Z}_b} + \frac{1}{jX_L + \underline{Z}_c}} = \\ &= \frac{\frac{219,393}{j15,708} + \frac{219,393e^{-j120^\circ}}{j15,708 + 6,455 + j12,328} + \frac{219,393e^{j120^\circ}}{j15,708 + 6,455 + j12,328}}{\frac{1}{j15,708} + \frac{1}{j15,708 + 6,455 + j12,328} + \frac{1}{j15,708 + 6,455 + j12,328}} = \\ &= 51,053e^{-j21,4^\circ} = 47,52 - j18,661 \text{ В}. \end{aligned}$$

Определим линейные токи $\dot{I}_B$ и $\dot{I}_C$ трехфазной системы:

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B - \dot{U}_{nN}}{jX_L + \underline{Z}_b} = \frac{219,393e^{-j120^\circ} - (47,52 - j18,661)}{j15,708 + 6,455 + j12,328} = 8,083e^{j150,4^\circ} = 5,842 + j6,953 \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C - \dot{U}_{nN}}{jX_L + \underline{Z}_b} = \frac{219,393e^{j120^\circ} - (47,52 - j18,661)}{j15,708 + 6,455 + j12,328} = 9,081e^{j50^\circ} = 1,188 - j10,942 \text{ А}.$$

Определим линейный ток $\dot{I}_A$ по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_A = -(\dot{I}_B + \dot{I}_C) = -(5,842 + j6,953 + 1,188 - j10,942) = 1,188 - j10,942 = 11,006e^{-j83,8^\circ} \text{ A}.$$

Определим фазные напряжения приемника:

$$\dot{U}_a = 0 \text{ B};$$

$$\dot{U}_b = \dot{I}_B \underline{Z}_b = 8,083e^{j150,4^\circ} \cdot 13,916e^{j62,4^\circ} = 112,478e^{-j147,2^\circ} = -94,556 - j60,915 \text{ B};$$

$$\dot{U}_c = \dot{I}_C \underline{Z}_c = 9,081e^{j50^\circ} \cdot 13,916e^{j62,4^\circ} = 126,371e^{j112,3^\circ} = -48,004 + j116,898 \text{ B}.$$

Определим фазные токи нагрузки:

$$\dot{I}_{aR} = 0 \text{ A};$$

$$\dot{I}_{aL} = 0 \text{ A};$$

$$\dot{I}_{bR} = \frac{\dot{U}_b}{R} = \frac{112,478e^{-j147,2^\circ}}{30} = 3,749e^{-j147,2^\circ} = -3,152 - j2,03 \text{ A};$$

$$\dot{I}_{bL} = \frac{\dot{U}_b}{jX_L} = \frac{112,478e^{-j147,2^\circ}}{15,708e^{j90^\circ}} = 7,161e^{j122,8^\circ} = -3,878 + j6,02 \text{ A};$$

$$\dot{I}_{cR} = \frac{\dot{U}_c}{R} = \frac{126,371e^{j112,3^\circ}}{30} = 4,212e^{j112,3^\circ} = -1,6 + j3,897 \text{ A};$$

$$\dot{I}_{cL} = \frac{\dot{U}_c}{jX_L} = \frac{126,371e^{j112,3^\circ}}{15,708e^{j90^\circ}} = 8,045e^{j22,3^\circ} = 7,442 + j3,056 \text{ A}.$$

Определим потерю напряжения в линиях трехфазной системы:

$$\dot{U}_{aL} = \dot{I}_A jX_L = 11,006e^{-j83,8^\circ} \cdot 15,708e^{j90^\circ} = 172,883e^{j6,2^\circ} = 171,873 + j18,661 \text{ B};$$

$$\dot{U}_{bL} = \dot{I}_B jX_L = 8,083e^{j150,4^\circ} \cdot 15,708e^{j90^\circ} = 126,964e^{-j119,6^\circ} = -62,661 - j110,424 \text{ B};$$

$$\dot{U}_{cL} = \dot{I}_C jX_L = 9,081e^{j50^\circ} \cdot 15,708e^{j90^\circ} = 142,646e^{j140^\circ} = -109,212 + j91,763 \text{ B}.$$

Векторная диаграмма токов и напряжений при коротком замыкании фазы *an* приемника изображена на рисунке 3.28.

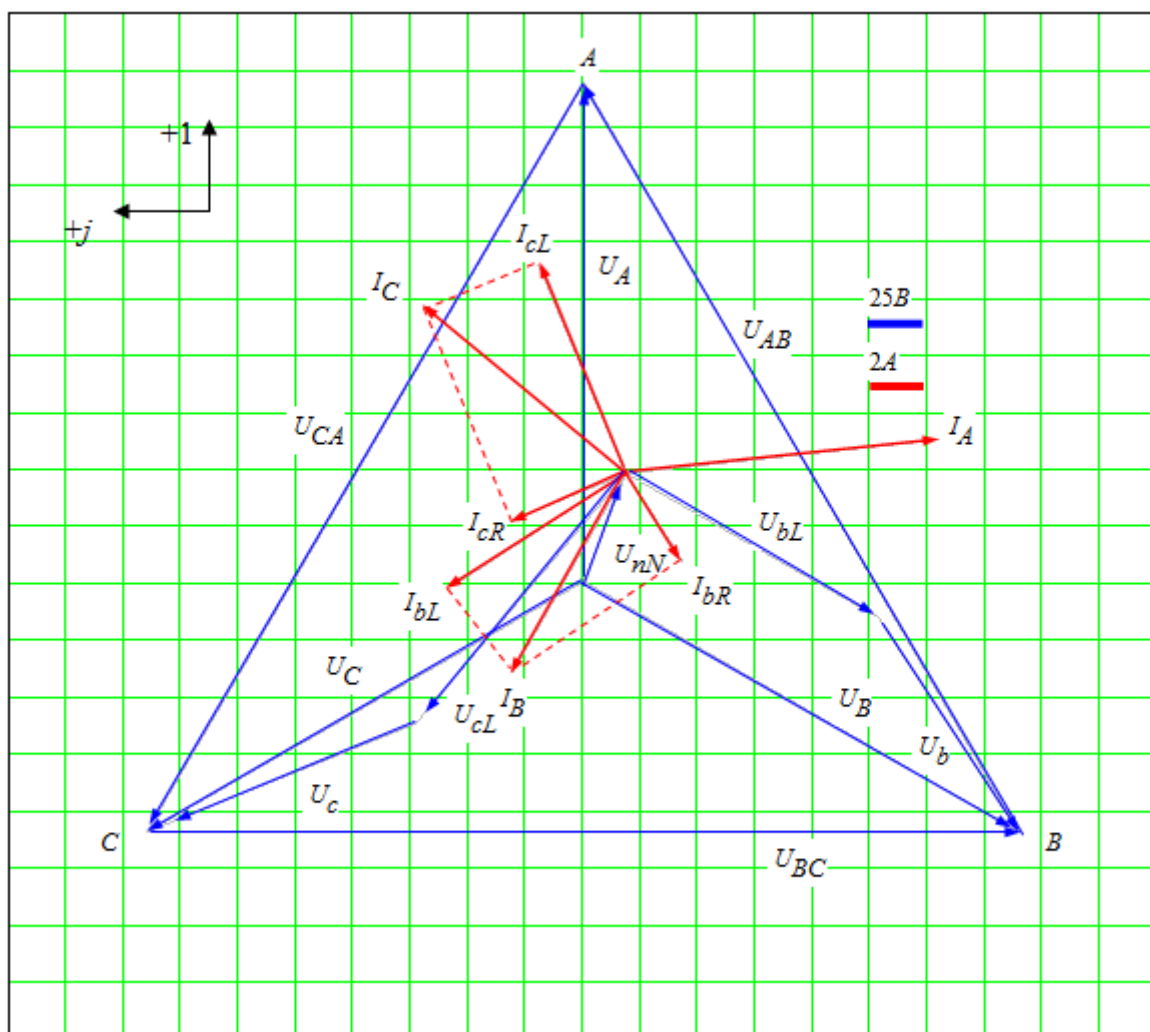


Рисунок 3.28 – Векторная диаграмма токов и напряжений

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 2.710-81 ЕСКД. Обозначения буквенно-цифровые в электрических схемах.
2. ГОСТ Р 52002-2003. ЭЛЕКТРОТЕХНИКА. Термины и определения основных понятий.
3. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник для бакалавров / Л.А. Бессонов. – 11-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2013. – 701 с.
4. Горбунов, А.Н. Теоретические основы электротехники: Учебник для с.-х. вузов / А.Н. Горбунов, И.Т. Туганбаев, В.И. Загинайлов, А.С. Знаев, А.В. Кравцов, И.Я. Редько. – Астана, 2012. – 413 с.
5. Горбунов, А.Н. Теоретические основы электротехники: Учебник для с.-х. вузов / А.Н. Горбунов, И.Д. Кабанов, А.В. Кравцов, И.Я. Редько. – М., 2003. – 304 с.
6. Горбунов, А.Н. Электротехника: Учебник для с.-х. вузов / А.Н. Горбунов, И.Д. Кабанов, А.В. Кравцов, Петров В.А., И.Я. Редько. Под ред. А.В. Кравцова. – М., 2003. – 271 с.
7. Демирчан, К.С. Теоретические основы электротехники. Том 1. / Демирчан К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. 4-е изд. – Санкт-Петербург: Питер, 2004. – 463 с.
8. Демирчан, К.С. Теоретические основы электротехники. Том 2. / Демирчан К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. 4-е изд. – Санкт-Петербург: Питер, 2004. – 576 с.
9. Демирчан, К.С. Теоретические основы электротехники. Том 3. / Демирчан К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. 4-е изд. – Санкт-Петербург: Питер, 2004. – 377 с.
10. Немцов, В.М. Электротехника и электроника: учебник для вузов / В.М. Немцов. – Москва: Абрис, 2012. – 560 с.

11. Рекус, Г.Г. Сборник задач и упражнений по электротехнике и основам электроники. / Рекус Г.Г., Белоусов А.И. 2-е изд., перераб. – М.: Высшая школа, 2001. – 416 с.

А.Н. Ткачёв, Е.Н. Епишков

**Теоретические основы электротехники.
Расчёт линейных электрических цепей**

Учебное пособие