



**А.Н. Ткачёв, Е.Н. Епишков**

**Теоретические основы электротехники.  
Переходные процессы, цепи с распределенными  
параметрами, электромагнитное поле**

*Учебное пособие*

Образовательное учреждение высшего образования  
«Южно-Уральский технологический университет»

**А.Н. Ткачёв, Е.Н. Епишков**

**Теоретические основы электротехники.  
Переходные процессы, цепи с распределенными  
параметрами, электромагнитное поле**

*Учебное пособие*

Челябинск

2023

**УДК 621.3**  
**ББК 31.21**  
**Т48**

**Авторы:**

А.Н. Ткачёв – кандидат технических наук, доцент кафедры «Техника и технологии» ОУ ВО «Южно-Уральский технологический университет»;

Е.Н. Епишков – кандидат технических наук, доцент кафедры «Техника и технологии» ОУ ВО «Южно-Уральский технологический университет», доцент кафедры «Энергообеспечение и автоматизация технологических процессов» ФГБОУ ВО «Южно-Уральский государственный аграрный университет»;

**Рецензенты:**

Хаматдинова М.Р. – кандидат технических наук, доцент кафедры «Техника и технологии» ОУ ВО «Южно-Уральский технологический университет»;

Ильин Ю.П. – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Энергообеспечение и автоматизация технологических процессов» ФГБОУ ВО «Южно-Уральский государственный аграрный университет».

Царев И.Б. – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Электрооборудование и электротехнологии» ФГБОУ ВО «Южно-Уральский государственный аграрный университет».

**Ткачёв, А.Н., Епишков, Е.Н.**

Теоретические основы электротехники. Переходные процессы, цепи с распределенными параметрами, электромагнитное поле: учебное пособие [Электронный ресурс] / А.Н. Ткачёв, Е.Н. Епишков. – Челябинск: ОУ ВО «Южно-Уральский технологический университет», 2023. – Режим доступа: <https://www.inueso.ru/rio/2023/978-5-6048829-3-1.pdf>, свободный. – Загл. с экрана. – 88 с.

ISBN 978-5-6048829-3-1

Содержание учебного пособия соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего образования по направлению подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника (уровень бакалавриат).

В учебном пособии представлена теоретическая информация и раскрыты методы расчета переходных процессов, цепей с распределенными параметрами и электромагнитного поля, приведены примеры решения задач для данных цепей. Пособие иллюстрировано большим количеством схем и рисунков.

Учебное пособие предназначено для обучающихся по направлению подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, является единым для всех форм обучения.

**Текстовое электронное издание**

**Минимальные системные требования:**

Компьютер: процессор AMD, Intel от 1ГГц, 100 Мб HDD, ОЗУ от 1 Гб,

Видеоадаптер от 1024 Мб, Сетевой адаптер 10/100/1000 Мб/с;

Клавиатура; Мышь; Монитор с разрешением от 800x600;

Операционная система: Windows XP SP3/Vista/7/8/10;

Программное обеспечение: Adobe Acrobat Reader, браузер Internet Explorer, Mozilla Firefox и др.

Скорость подключения от 10 Мб/с.

© ОУ ВО «Южно-Уральский  
технологический университет», 2023  
© А.Н. Ткачёв, Е.Н. Епишков, 2023

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
ГЛАВА 1 АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ АНАЛИТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ .....	6
1.1 Классический метод анализа переходных процессов .....	7
1.2 Операторный метод анализа переходных процессов .....	36
ГЛАВА 2 ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ .....	57
2.1 Первичные параметры длинной линии .....	57
2.2 Уравнения передачи длинной линии .....	69
ГЛАВА 3 ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ .....	76
3.1 Ротор векторного поля .....	76
3.2. Вихревое электрическое поле .....	79
3.3. Ток смещения .....	81
3.4. Уравнения Максвелла .....	84
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	87

## ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие предназначено для помощи обучающимся в усвоении разделов переходные процессы, цепи с распределенными параметрами и электромагнитное поле курса теоретических основ электротехники (ТОЭ) и электротехники.

Электротехника – это наука о практическом применении электрических и магнитных явлений. Электрическая энергия применяется во всех областях деятельности человека. Её уникальные свойства обеспечивают преимущество перед другими видами энергии: относительная простота получения; простота передачи при минимуме потерь; высокий КПД преобразования в другие виды энергии; простота изменения параметров; почти мгновенная передача к потребителю.

Задачей данной дисциплины является изучение качественной и количественной стороны электромагнитных явлений и процессов, происходящих в электротехнических устройствах. Изучение представленных разделов теоретических основ электротехники позволяет усвоить основные пути решения задач, которые возникают в специальных дисциплинах.

Дисциплина «Теоретические основы электротехники» является базовой для изучения таких специальных дисциплин как:

- электроника;
- электрические и электронные аппараты;
- электрические машины и т. д.

Цели освоения дисциплины:

- формирование у студентов системы знаний методов анализа электрических и магнитных цепей как математических моделей электротехнических объектов;
- исследование электромагнитных процессов, протекающих в современных электротехнических установках при различных энергетических преобразованиях;

– освоение современных методов моделирования электромагнитных процессов с использованием современных технологий.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

ОПК-4: Способен использовать методы анализа и моделирования электрических цепей и электрических машин:

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

ОПК-4.1. Знать:

– основы электротехники;

ОПК-4.2. Уметь:

– применять методы анализа и моделирования электрических цепей;

ОПК-4.3. Владеть:

– навыками анализа и моделирования электрических цепей.

Содержание пособия раскрывает теоретические и практические аспекты решения задач по рассматриваемым разделам курса. Описаны существующие и наиболее часто встречающиеся методы расчета переходных процессов, цепей с распределенными параметрами и электромагнитного поля. Приведены примеры решения задач с подробным и последовательным описанием, что позволит освоить представленные темы обучающимся с различным уровнем подготовки.

Учебное пособие предназначено для обучающихся по направлению подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника (уровень бакалавриат), соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего образования (ФГОС ВО) по данному направлению подготовки, и является единым для всех форм обучения.

## ГЛАВА 1 АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ АНАЛИТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

Динамические режимы являются основными режимами работы любых электрических цепей. Наиболее важным и сложным для анализа являются переходные процессы от одного установившегося режима к другому [2].

Переходные процессы в электрических цепях возникают при коммутациях или при быстрых изменениях параметров элементов электрических цепей [2]. Установившиеся режимы до и после коммутации называются принужденными режимами. Для удобства анализа момент коммутации совмещают с началом координат, то есть в момент  $t = 0$ . Если время коммутации задано и отлично от нуля, то начало координат смещают в момент коммутации, а полученное решение смещают обратно [2]. Установившийся режим до коммутации заканчивается при  $t = (0-)$ , а при  $t = (0+)$  начинается переходной процесс, который заканчивается новым принужденным режимом при  $t = \infty$ . Коммутация происходит мгновенно [2].

По законам коммутации в момент коммутации не могут изменяться скачком напряжения  $U_C$  на конденсаторах, или суммарный заряд  $\sum q$  на обкладках конденсаторов, присоединенных к любому узлу схемы после коммутации, а также токи  $i_L$  в ветвях с индуктивными элементами или суммарное потокосцепление  $\sum \psi$  каждого контура послекоммутационной схемы. Остальные токи и напряжения в момент коммутации могут изменяться скачком [2].

При действии в цепи постоянных, синусоидальных и других видов периодических напряжений и токов динамические режимы рассчитывают классическим или операторным методами [2].

Во время переходного процесса токи и напряжения в линейной электрической цепи представляются в виде суммы принужденных и свободных составляющих, которые рассчитываются самостоятельно:

$$i(t) = i_{\text{пр}}(t) + i_{\text{св}}(t), \quad u(t) = u_{\text{пр}}(t) + u_{\text{св}}(t). \quad (1.1)$$

Установившиеся значения токов и напряжений до коммутации и принужденные составляющие после коммутации определяются известными методами расчета цепей в установившемся режиме [2]. Свободные составляющие обусловлены изменением энергии реактивных элементов схемы и затухают до нуля в течение некоторого времени, которое и определяет длительность переходного процесса [2].

При действии в цепи непериодических источников тока или напряжения расчет целесообразно вести методом наложения с использованием интеграла наложения (интеграла Дюамеля) [2].

Расчёт динамических режимов в сложных электрических цепях с большим количеством реактивных элементов и в нелинейных электрических цепях ведут численными методами [2].

### **1.1 Классический метод анализа переходных процессов**

Расчет переходных процессов классическим методом основан на представлении переходных токов и напряжений суммой принуждённых и свободных составляющих. Это позволяет решать дифференциальные уравнения состояния цепи только относительно свободных составляющих. Исследуемая электрическая цепь должна быть линейной [2].

Решение уравнения относительно свободной составляющей переходного тока или напряжения определяется количеством и видом корней  $P_L$  характеристического уравнения электрической цепи [2]. Характеристическое уравнение можно получить, определив входное комплексное сопротивление  $Z(j\omega)$  относительно любой ветви, заменив  $j\omega$  на  $p$  и приравняв полученное выражение к нулю. Рекомендуется определять входное сопротивление относительно ветви с реактивным элементом [2].



В общем случае, если корни характеристического уравнения вещественные и не равны между собой, решение для свободной составляющей тока имеет вид [2]:

$$i_{св} = A_0 e^{p_1 t} + A_1 e^{p_2 t} + \dots + A_k e^{p_k t}. \quad (1.2)$$

Если корни характеристического уравнения вещественные и равны между собой, то:

$$i_{св} = A_0 e^{pt} + A_1 t e^{pt} + A_2 t^2 e^{pt} + \dots + A_k t^k e^{pt}.$$

В случае пары комплексно-сопряженных корней  $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0$ :

$$i_{св} = A e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \psi) = A_1 e^{-\delta t} \sin \omega_0 t + A_2 e^{-\delta t} \cos \omega_0 t.$$

### **Последовательность расчета переходного процесса**

1. Составим характеристическое уравнение для послекоммутационной схемы и найдём его корни [2]. Запишем решение в общем виде.
2. Рассчитаем установившиеся режимы до и после коммутации.
3. По уравнениям:

$$i_{Lсв}(0+) = i_L(0+) - i_{Lnp}(0+); \quad (1.3)$$

$$u_{Cсв}(0+) = u_C(0+) - u_{Cnp}(0+). \quad (1.4)$$

найдем независимые начальные значения для свободных составляющих  $i_{Lсв}(0+)$  и  $u_{Cсв}(0+)$  [2].

4. Составим по законам Кирхгофа для послекоммутационной схемы необходимую систему уравнений для мгновенных значений токов и

напряжений, и рассмотрим её при  $t = 0$  [2]. Из системы уравнений после подстановки независимых начальных значений найдём зависимые начальные значения  $i_{C_{св}}(0+)$ ,  $u_{L_{св}}(0+)$ ,  $u_{R_{св}}(0+)$ ,  $i_{R_{св}}(0+)$ .

5. Найдём постоянные интегрирования, учитывая вид корней характеристического уравнения и начальные значения [2]. В задачах второго порядка и выше для определения постоянных интегрирования необходимо составлять дополнительные уравнения, дифференцируя необходимое число раз общее решение и определяя значения производных от начальных значений.

6. Запишем выражения для переходных токов и переходных напряжений как суммы [2]

$$i = i_{np} + i_{св}, \quad u = u_{np} + u_{св}. \quad (1.5)$$

Приведённые далее примеры показывают, что самым сложным этапом в классическом методе анализа переходных процессов является этап определения постоянных интегрирования. Сложность возрастает с увеличением порядка цепи, поэтому классическим методом решают задачи не выше второго порядка [2].

**Рассмотрим примеры расчета переходного процесса классическим методом в электрической цепи первого порядка**

**Пример 1.** Параметры цепи (рисунок 1.1, а)  $R_1 = R_2 = R_3 = 50$  Ом,  $C = 100$  мкФ,  $E = 150$  В. Необходимо рассчитать переходные токи  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  и переходное напряжение  $u_C$ . [2]

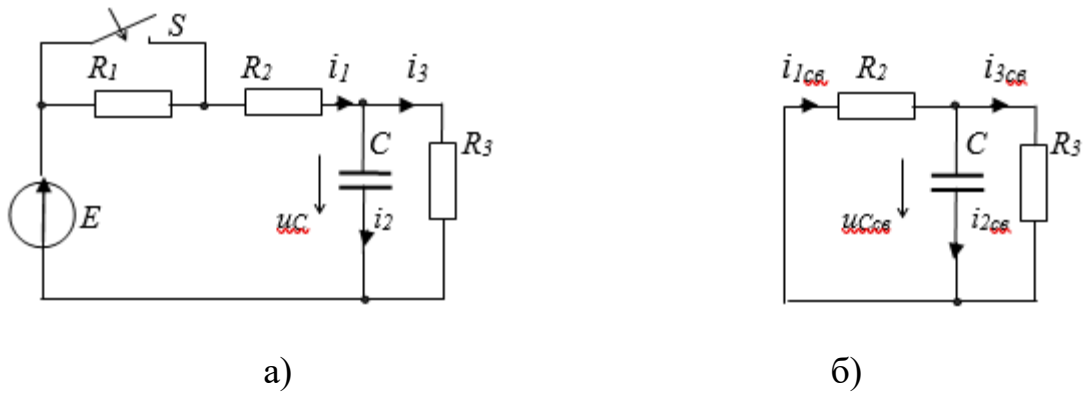


Рисунок 1.1 Расчетная схема к примеру 1

Рассчитаем установившийся режим до коммутации:

$$i_2(0-) = 0$$

$$i_1(0-) = i_3(0-) = E / (R_1 + R_2 + R_3) = 150 / 150 = 1$$

$$u_C(0-) = i_3(0-) \cdot R_3 = 1 \cdot 50 = 50$$

Напряжение на конденсаторе в момент коммутации не меняется, следовательно:

$$u_C(0+) = u_C(0-) = 50.$$

Принужденный режим послекоммутационной схемы обусловлен воздействием постоянной ЭДС [2]. Поэтому, начиная с момента  $t(0+)$  принужденные составляющие токов и напряжений остаются постоянными:

$$i_{2пр} = i_{2пр}(0+) = 0$$

$$i_{1пр}(0+) = i_{3пр}(0+) = \frac{E}{(R_1 + R_2)} = \frac{150}{100} = 1.5$$

$$u_{Cпр}(0+) = i_{3пр}(0+) \cdot R_3 = 1.5 \cdot 50 = 75.$$

Найдём начальное значение свободной составляющей напряжения на конденсаторе для момента  $t(0+)$ :

$$u_{Cсв}(0+) = u_C(0+) - u_{Cнр}(0+) = 50 - 75 = -25 [2] .$$

Найдём корни характеристического уравнения, для чего определим входное сопротивление в послекоммутационной схеме относительно ветви с конденсатором (рисунок 1.1, б) [2]:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= 1/j\omega C + R_2 R_3 / (R_2 + R_3) ; \\ Z(p) &= 1/pC + R_2 R_3 / (R_2 + R_3) = 0 ; \\ p &= -(R_2 + R_3) / R_2 R_3 C = -400 . \end{aligned}$$

Свободные составляющие при одном корне имеют вид:

$$i_{1св} = Ae^{pt} , i_{2св} = Be^{pt} , i_{3св} = Ce^{pt} , i_{4св} = De^{pt} .$$

Постоянные интегрирования  $A, B, C, D$  могут быть определены двумя способами [2].

### **Первый способ:**

Находим начальные значения переходных токов и напряжений для после коммутационной схемы (рисунок 1.1, а), после чего определяем начальные значения свободных составляющих [2].

По законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} i_1(0+) - i_2(0+) - i_3(0+) = 0 \\ R_2 i_1(0+) + u_C(0+) = E \\ u_C(0+) - R_3 i_3(0+) = 0 \end{cases} ,$$

Откуда:

$$\begin{aligned}i_3(0+) &= u_C(0+)/R_3 = 50/50 = 1; \\i_1(0+) &= -[E - u_C(0+)]/R_1 = (150 - 50)/50 = 2; \\i_2(0+) &= i_1(0+) - i_3(0+) = 2 - 1 = 1.\end{aligned}$$

Значения свободных составляющих при  $t = (0+)$ :

$$\begin{aligned}i_{cв}(0+) &= i_1(0+) - i_{1np}(0+) = 2 - 1.5 = 0.5; \\i_{2cв}(0+) &= i_2(0+) - i_{2np}(0+) = 1 - 0 = 1; \\i_{3cв}(0+) &= i_3(0+) - i_{3np}(0+) = 1 - 1.5 = -0.5.\end{aligned}$$

### Второй способ:

Находим начальные значения свободных составляющих токов и напряжений для схемы (рисунок 1.1, б), из которой исключен источник принужденного режима.

По законам Кирхгофа:

$$\begin{cases}i_{1cв}(0+) - i_{2cв}(0+) - i_{3cв}(0+) = 0; \\R_2 i_{1cв}(0+) + u_{Cсв}(0+) = 0; \\u_{Cсв}(0+) - R_3 i_{3cв}(0+) = 0,\end{cases}$$

Откуда:

$$\begin{aligned}i_{1cв}(0+) &= -u_{Cсв}(0+)/R_1 = 25/50 = 0.5; \\i_{3cв}(0+) &= u_{Cсв}(0+)/R_3 = -25/50 = -0.5; \\i_{2cв}(0+) &= i_{1cв}(0+) - i_{3cв}(0+) = 0.5 + 0.5 = 1.\end{aligned}$$

Второй способ оказался более коротким [2].

Определим постоянные интегрирования:

$$A = i_{1c6}(0+) = 0.5 ; B = i_{2c6}(0+) = 1 ; C = i_{3c6}(0+) = -0.5 ; D = u_{C6}(0+) = -25.$$

Переходные токи и напряжение после коммутации равны суммам принужденных и свободных составляющих (рисунок 1.2):

$$i_1 = 1.5 + 0.5e^{-400t} ; i_2 = e^{-400t} ;$$

$$i_3 = 1.5 - 0.5e^{-400t} ; u_C = 75 - 25e^{-400t} .$$

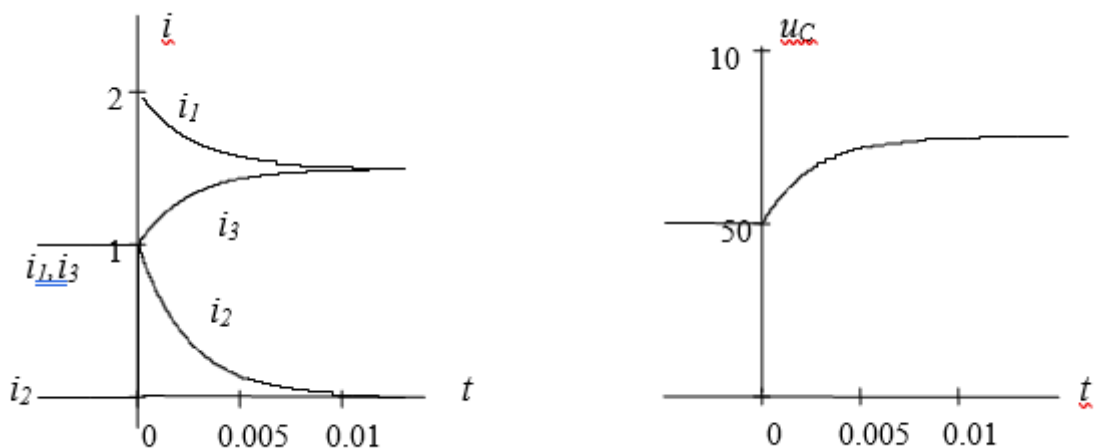


Рисунок 1.2. Переходные токи и напряжение после коммутации к примеру 1

**Пример 2** [2]. Параметры цепи (рисунок 1.3, а)  $R_2 = R_3 = 2$  Ом,  $L = 1$  мГн,  $E = 12$  В.

Необходимо рассчитать переходные токи и переходное напряжение на индуктивности [2].

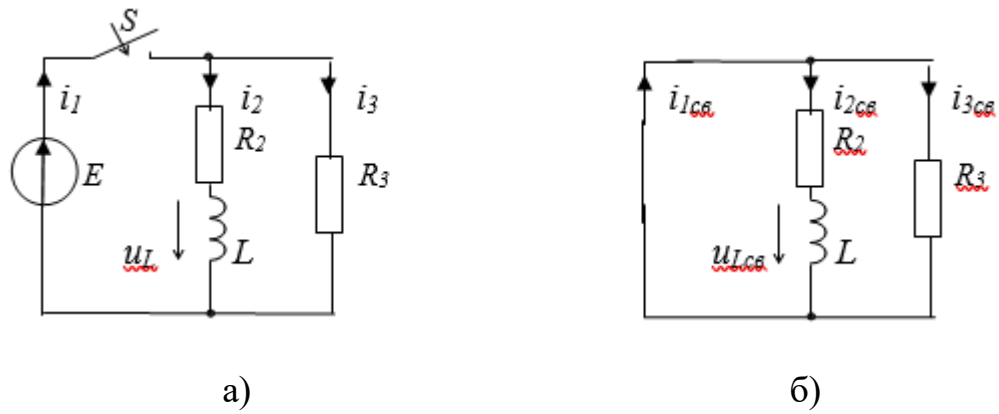


Рисунок 1.3. Расчетная схема к примеру 2

До коммутации:  $i_1(0-) = 0$ ,  $i_2(0-) = 0$ ,  $i_3(0-) = 0$ ,  $u_L(0-) = 0$ .

В момент коммутации ток:  $i_2(0-) = i_2(0+) = 0$ .

Определим значения принужденных составляющих токов и напряжений для  $t(0+)$ :

$$i_{1np}(0+) = E(R_2 + R_3) / R_2 R_3 = 12(2 + 2) / 2 \cdot 2 = 12;$$

$$i_{2np}(0+) = i_{3np}(0+) = 0.5 i_{1np}(0+) = 6.$$

Значение свободной составляющей тока через индуктивность в момент  $t(0+)$ :

$$i_{2св}(0+) = i_2(0+) - i_{2np}(0+) = 0 - 6 = -6.$$

Характеристическое сопротивление цепи относительно ветви с индуктивностью:

$$Z(p) = pL + R_2 = 0;$$

$$p = -R_2 / L = -2 / 10^{-3} = -2000.$$

Система уравнений для свободных составляющих (рисунок 1.3, б):

$$\begin{cases} i_{1c6}(0+) - i_{2c6}(0+) - i_{3c6}(0+) = 0; \\ R_2 i_{2c6}(0+) + u_{Lc6}(0+) = 0; \\ R_3 i_{3c6}(0+) = 0, \end{cases}$$

Откуда:

$$\begin{aligned} i_{3c6}(0+) = 0; \quad i_{1c6}(0+) = i_{2c6}(0+) = -6; \\ u_{Lc6}(0+) = -R_2 i_{2c6}(0+) = 6 \cdot 2 = 12. \end{aligned}$$

Свободные составляющие имеют вид:

$$i_{1c6} = Ae^{pt}; \quad i_{2c6} = Be^{pt}; \quad i_{3c6} = Ce^{pt}; \quad u_{Lc6} = De^{pt}.$$

Найдём постоянные интегрирования:

$$A = i_{1c6}(0+) = -6; \quad B = i_{2c6}(0+) = -6; \quad C = i_{3c6}(0+) = 0; \quad D = u_{Lc6}(0+) = 12.$$

Запишем переходные токи и переходное напряжение на индуктивности:

$$\begin{aligned} i_1 = 12 - 6 \cdot e^{pt} = 6(2 - e^{pt}); \quad i_2 = 6 - 6 \cdot e^{pt} = 6(1 - e^{pt}); \\ i_3 = 6 - 0 = 6; \quad u_L = 0 + 12 \cdot e^{pt} = 12 \cdot e^{pt}. \end{aligned}$$

Соответствующие кривые приведены на рисунке 1.4 [2].



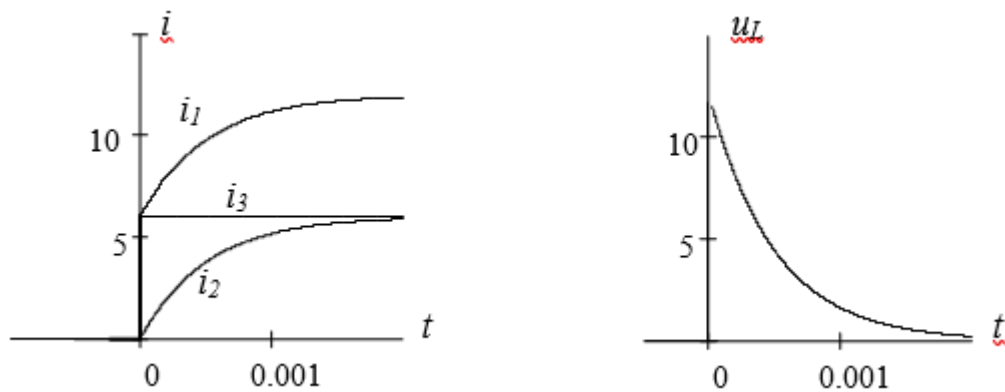


Рисунок 1.4. Переходные токи и напряжения после коммутации к примеру 2

**Пример 3.** Параметры цепи (рисунок 1.5, а)  $J = 12$  А,  $R_2 = R_3 = 2$  Ом,  $L = 1$  мГн [2].

Необходимо рассчитать переходные токи и переходное напряжение на индуктивности.

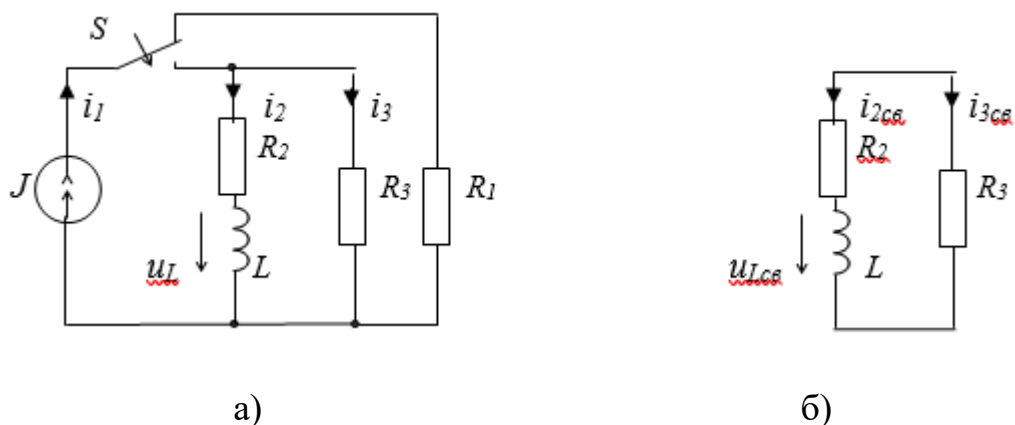


Рисунок 1.5. Расчетная схема к примеру 3

До коммутации  $i_1(0-) = J$ ;  $i_2(0-) = 0$ ;  $i_3(0-) = 0$ ;  $u_L(0-) = 0$ .

После коммутации  $i_2(0+) = i_2(0-) = 0$ ;  $i_1(0+) = J$ ;  $i_3(0+) = J$ .

В принужденном режиме ток источника тока  $J$  разделяется по параллельным ветвям:

$$i_{1np}(0+) = J = 12; \quad i_{2np}(0+) = J R_3 / (R_2 + R_3) = 6;$$

$$i_{3np}(0+) = J R_2 / (R_2 + R_3) = 6; \quad u_{Lnp}(0+) = 0;$$

Начальное значение свободной составляющей второго тока:

$$i_{2св}(0+) = i_2(0+) - i_{2np}(0+) = 0 - 6 = -6.$$

Остальные значения свободных составляющих при  $t = (0+)$  найдем двумя способами [2].

**Первый способ:**

Для схемы (рисунок 1.5, а) составим систему уравнений:

$$\begin{cases} i_1(0+) - i_2(0+) - i_3(0+) = 0; \\ R_2 i_2(0+) + u_L(0+) - R_3 i_3(0+) = 0, \end{cases}$$

Откуда

$$i_{1св}(0+) = i_1(0+) - i_{1np}(0+) = J - J = 0;$$

$$i_{3св}(0+) = i_3(0+) - i_{3np}(0+) = 12 - 6 = 6;$$

$$u_{Lсв}(0+) = u_L(0+) - u_{Lnp}(0+) = 24 - 0 = 24.$$

**Второй способ:**

В ветви с источником тока переходной процесс возникнуть не может, поэтому  $i_{1св}(0+) = 0$  [2].

Составим систему уравнений для свободных составляющих по схеме (рисунок 1.5, б):

$$\begin{cases} i_{2св}(0+) = i_{3св}(0+); \\ R_2 i_{2св}(0+) + u_{Lсв}(0+) - R_3 i_{3св}(0+) = 0, \end{cases}$$

Откуда:

$$i_{3c\epsilon}(0+) = 6; \quad u_{Lc\epsilon}(0+) = R_3 i_{3c\epsilon}(0+) - R_2 i_{2c\epsilon}(0+) = 6 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 24.$$

Составим характеристическое уравнение цепи относительно ветви с индуктивностью (ветвь с источником тока разрываем из-за бесконечного внутреннего сопротивления) и найдём корень:

$$Z(p) = pL + R_2 + R_3 = 0; \quad p = -(R_2 + R_3)/L = -(2 + 2)/10^{-3} = -4000.$$

Выражения для свободных составляющих токов и напряжения на индуктивности имеют вид [2]:

$$i_{1c\epsilon} = Ae^{pt}; \quad i_{2c\epsilon} = Be^{pt}; \quad i_{3c\epsilon} = Ce^{pt}; \quad u_{Lc\epsilon} = De^{pt},$$

где:

$$A = i_{1c\epsilon}(0+) = 0; \quad B = i_{2c\epsilon}(0+) = -6; \quad C = i_{3c\epsilon}(0+) = 6; \quad D = u_{Lc\epsilon}(0+) = 0.$$

Запишем переходные токи и переходное напряжение на индуктивности:

$$i_1 = i_{1np} + i_{1c\epsilon} = 12 - 0 = 12; \quad i_2 = i_{2np} + i_{2c\epsilon} = 6 - 6e^{pt} = 6(1 - e^{pt}), \\ i_3 = i_{3np} + i_{3c\epsilon} = 6(1 + e^{pt}); \quad u_L = u_{Lnp} + u_{Lc\epsilon} = 0 + 24e^{pt} = 24e^{pt};$$

Соответствующие переходные кривые приведены на рисунке 1.6 [2].

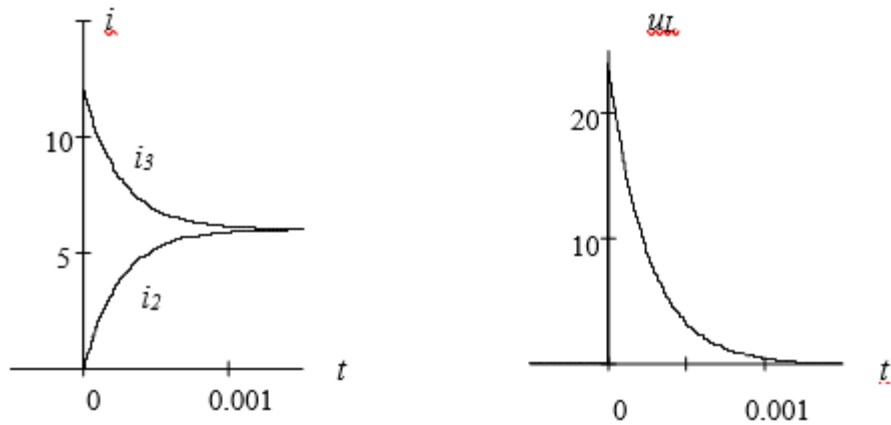


Рисунок 1.6. Переходные токи и напряжения после коммутации к примеру 3

**Пример 4.** Параметры цепи (рисунок 1.7, а)  $R_1 = 40$  Ом,  $R_2 = 32$  Ом,  $C = 22$  мкФ,  $e = 25 \sin 314t$ .

Необходимо рассчитать переходные токи и переходное напряжение на конденсаторе [2].

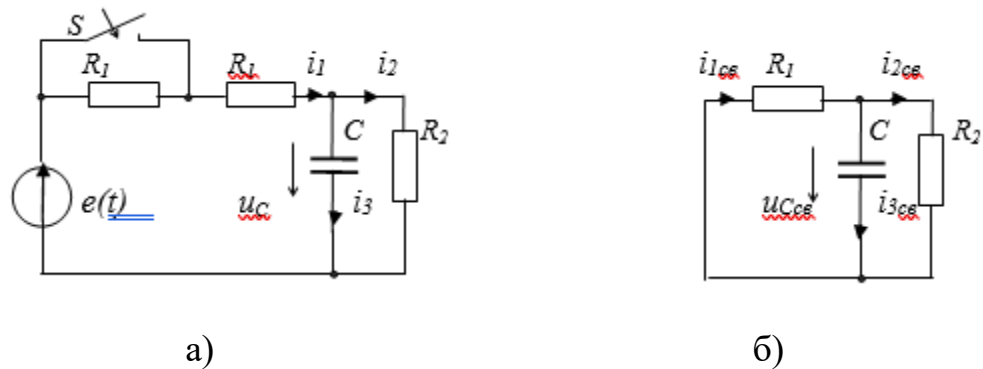


Рисунок 1.7. Расчетная схема к примеру 4

До коммутации:

$$\underline{I}_{1m} = E_m / \left( 2R_1 - j \frac{X_C \cdot R_2}{R_2 - jX_C} \right) = 25 / \left( 80 - j \frac{70.8 \cdot 32}{32 - j70.8} \right) = 0.233 e^{j6^\circ 25'};$$

$$i_1 = 0.233 \sin(314t - 6^\circ 25');$$

$$\underline{U}_{Cm} = \underline{E}_m - 2R_1 \underline{I}_{1m} = 25 - 2 \cdot 40 \cdot 0.233 e^{j6^\circ 25'} = 6.77 e^{-j17^\circ 55'};$$

$$u_C = 6.77 \sin(314t - 17^\circ 55'); \quad u_C(0-) = u_C(0+) = -6.77 \sin 17^\circ 55' = -2.1.$$

Составим характеристическое уравнение цепи относительно ветви с конденсатором и найдём корень.

$$Z(p) = 1/pC + R_1R_2/(R_1 + R_2) = 0;$$

$$p = -(R_1 + R_2)/CR_1R_2 = -(40 + 32)/40 \cdot 32 \cdot 22.5 \cdot 10^{-6} = -2500.$$

Найдём принужденные составляющие первого тока и напряжения на конденсаторе после коммутации [2].

$$\underline{I}_{1m np} = \underline{E}_m / \left( R_1 - j \frac{X_C \cdot R_2}{R_2 - jX_C} \right) = 25 / \left( 40 - j \frac{70.8 \cdot 32}{32 - j70.8} \right) = 0.37 e^{j10^\circ 15'};$$

$$i_{1np} = 0.37 \sin(314t + 10^\circ 15');$$

$$\underline{U}_{Cm np} = \underline{E}_m - R_1 \underline{I}_{1m np} = 25 - 40 \cdot 0.37 e^{j10^\circ 15'} = 10.8 e^{-j13^\circ 55'}.$$

$$u_{C np} = 10.8 \sin(314t - 13^\circ 55');$$

$$u_{C np}(0+) = -10.8 \sin 13^\circ 55' = -2.6;$$

$$i_{2np} = u_{C np} / R_2 = 0.2116 \sin(314t - 13^\circ 55');$$

$$u_{Cсв}(0+) = u_C(0+) - u_{Cnp}(0+) = -2.1 + 2.6 = 0.5.$$

Выражения для свободных составляющих имеют вид:

$$i_{1св} = Ae^{pt}, u_{Cсв} = Be^{pt}, i_{2св} = Ce^{pt}.$$

Определим постоянные интегрирования с помощью схемы (рисунок 1.7, б).

$$\begin{cases} R_1 i_{1св}(0+) + R_2 i_{2св}(0+) = 0; \\ R_2 i_{2св}(0+) - u_{Cсв}(0+) = 0, \end{cases}$$

в результате получим [2]:

$$B = u_{C_{св}}(0+) = 0,5;$$

$$A = i_{1_{св}}(0+) = -u_{C_{св}}(0+)/R_1 = -0.0125;$$

$$C = i_{2_{св}}(0+) = u_{C_{св}}(0+)/R_2 = 0.0156.$$

Запишем переходные токи и переходное напряжение на конденсаторе [2].

$$i_1 = i_{1_{np}} + i_{1_{св}} = 0.37 \sin(314t + 10^\circ 15') - 0.0125e^{-2500t};$$

$$i_2 = i_{2_{np}} + i_{2_{св}} = 0.2116 \sin(314t - 13^\circ 55') + 0.0156e^{-2500t};$$

$$u_c = u_{C_{np}} + u_{C_{св}} = 10.8 \sin(314t - 13^\circ 55') + 0.5e^{-2500t}.$$

График переходного напряжения на конденсаторе показан на рисунке 1.8 [2].

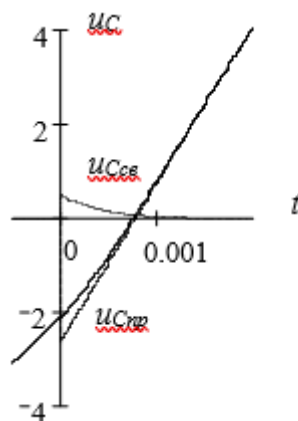


Рисунок 1.8. Переходные напряжения к примеру 4

**Пример 5.** Конденсатор, емкость которого  $C = 100$  мкФ, подключается к источнику постоянного напряжения  $U$  через реостат с сопротивлением  $R = 10$  Ом. Максимальное значение зависимости  $p_C(t)$  равно 250 Вт [2].

Необходимо рассчитать  $i(t)$ ,  $u_C(t)$  после коммутации; время, в течение которого ток уменьшается до половины своего максимального значения; количество энергии и заряд заряженного конденсатора; количество энергии, преобразованной в тепло в процессе зарядки конденсатора [2].

Мгновенное значение мощности конденсатора определяется выражением  $p_C = u_C i$ . Так как при заряде конденсатора  $u_C = U(1 - e^{-t/\tau})$ , а  $i = (U/R)e^{-t/\tau}$ , то  $p_C = (U/R)(e^{-t/\tau} - e^{-2t/\tau})$ ,

где  $\tau = RC = 10 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 10^{-3}$  [2].

Максимальную скорость нарастания энергии конденсатора найдем из условия  $d p_C / dt = 0$ . Определим значение  $e^{-t/\tau}$ , при котором  $p_C = 250$

$$d p_C / dt = -(U^2 / R \tau) e^{-t/\tau} + (2U^2 / R \tau) e^{-2t/\tau} = 0,$$

отсюда  $e^{-t/\tau} = 0.5$  [2].

Найдем напряжение источника  $U$  из следующего равенства:

$$250 = (0.5 - 0.25) U^2 / R = U^2 / 4R,$$

$$U = 100 \text{ В.}$$

В результате получим переходные зависимости [2]:

$$i(t) = 10 e^{-1000t}, \quad u_C(t) = 100(1 - e^{-1000t}).$$

Время уменьшения тока в два раза [2]:

$$i = (U/R) e^{-t/\tau} = I_m e^{-t/\tau};$$

$$I_1 = 0.5I_m = I_m e^{-t/\tau};$$

$$t_1 = \tau \ln(I_m/I) = 10^{-3} \ln 2 = 0.693 \cdot 10^{-3}.$$

Количество энергии и заряд конденсатора:

$$W_C = 0.5CU^2 = 0.5 \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4 = 0.5 \text{ Дж.}$$

$$q = CU = 100 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 0.01 \text{ Кл.}$$

Количество энергии преобразованной в тепло [2]:

$$W_R = \int_0^{\infty} i^2 R dt = \frac{U^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-2t/\tau} dt = -\frac{U^2 \tau}{2R} e^{-2t/\tau} \Big|_0^{\infty} = U^2 RC / 2R = 0.5CU^2 = 0.5 \text{ Дж.}$$

$$W_R = W_C.$$

Зависимости изменения  $i(t)$ ,  $u_C(t)$ ,  $p_C(t)$  показаны на рисунок 1.9.

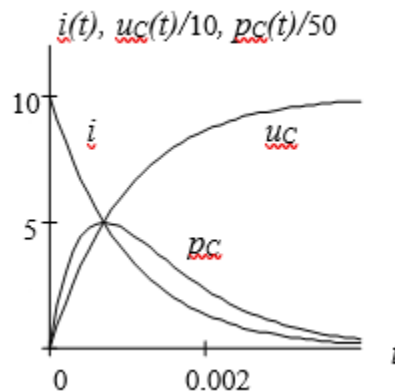


Рисунок 1.9. Графики зависимостей тока, напряжения и мощности к примеру

5

**Пример 6.** К гармоническому источнику ЭДС  $e(t) = 100 \sin(1000t + 45^\circ)$

В момент времени  $t_K = 0.004$  с подключается  $RL$  ветвь.  $R = 50$  Ом,  $L = 0.05$  Гн.



Необходимо получить выражение для тока в ветви [2].

Так как время коммутации не равно нулю, то общее выражение для тока имеет вид [2]:

$$i(t) = 1(t - t_K) [i_{i\ddot{o}}(t) + Ae^{p(t-t_K)}].$$

Определим принуждённую составляющую тока.

$$\underline{I}_{m\ i\ddot{o}} = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}} = \frac{100e^{j45^\circ}}{50\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = \sqrt{2},$$

$$i_{i\ddot{o}}(t) = \sqrt{2} \sin(1000t).$$

Корень характеристического уравнения  $p = -10000$ . Определим постоянную интегрирования  $A$  используя начальные значения в момент коммутации [2]:

$$t = t_K, \quad 0 = \sqrt{2} \sin 4 + A, \quad A = -1.07.$$

В результате получим следующее выражение для тока [2]:

$$i(t) = 1(t - 0.004) (\sqrt{2} \sin 1000t - 1.07e^{10000(t-0.004)}).$$

Множитель в виде смещённой единичной функции говорит о том, что до коммутации ток равен нулю. Кроме этого, смещена свободная составляющая переходного тока [2].

**Рассмотрим примеры расчета переходного процесса классическим методом в электрической цепи второго порядка.**

**Пример 7.** Параметры цепи (рисунок 1.10, а)  $R = 100$  Ом,  $L = 40 \cdot 10^{-3}$  Гн,  $C = 5 \cdot 10^{-6}$  Ф,  $E = 125$  В [2].

Необходимо рассчитать неизвестные переходные токи и напряжение на конденсаторе [2].

До коммутации  $i_1(0-) = 0$ ;  $i_2(0-) = 0$ ;  $i_3(0-) = 0$ ;  $u_L(0-) = 0$ ;  $u_C(0-) = 0$ .

По законам коммутации  $i_2(0+) = i_2(0-) = 0$ ,  $u_C(0+) = u_C(0-) = 0$ .

Принужденные составляющие токов и напряжений после коммутации  $i_{1np} = i_{2np} = E/R = 125/100 = 1.25$ ,  $i_{3np} = 0$ ,  $u_{Lnp} = 0$ ;  $u_{Cnp} = 0$ .

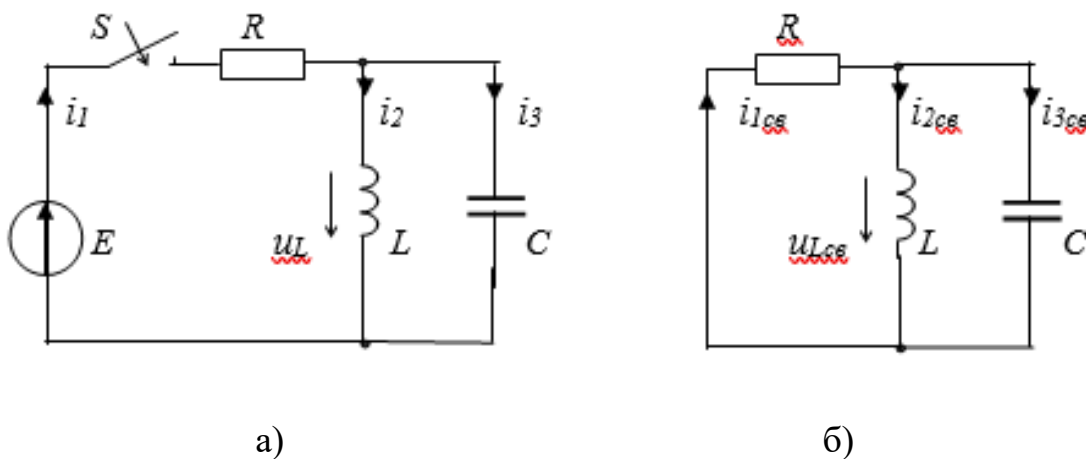


Рисунок 1.10. Расчетная схема к примеру 7

Определим свободные составляющие независимых начальных значений [2]:

$$i_{2св}(0+) = i_2(0+) - i_{2np}(0+) = 0 - 1.25 = -1.25.$$

$$u_{Cсв}(0+) = u_C(0+) - u_{Cnp}(0+) = 0 - 0 = 0.$$

Определим корни характеристического уравнения:

$$Z(p) = R + (pL/pC)/(pL + 1/pC) = 0; \quad p^2 + p/RC + 1/LC = 0;$$

$$p_{1,2} = -1/2RC \pm \sqrt{1/4R^2C^2 - 1/LC} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2};$$

$$\delta = \frac{1}{2 \cdot 100 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 10^3; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{40 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 5 \cdot 10^{-6}.$$

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{c\delta} = -1000 \pm j2000.$$

Составим систему уравнений для свободных составляющих (рисунок 1.10, б) [2]:

$$\begin{cases} i_{1c\delta} - i_{2c\delta} - i_{3c\delta} = 0; \\ Ri_{1c\delta} + u_{Lc\delta} = Ri_{1c\delta} + L di_{2c\delta}/dt = 0; \\ Ri_{1c\delta} + u_{Cc\delta} = 0. \end{cases}$$

После подстановки известных значений при  $t = (0+)$  получим [2]:

$$i_{1c\delta}(0+) = -u_{Cc\delta}(0+)/R = 0, \quad i_{3c\delta}(0+) = i_{1c\delta}(0+) - i_{2c\delta}(0+) = 1.25,$$

$$\left[ \frac{di_{2c\delta}}{dt} \right]_{t=(0+)} = -\frac{R}{L} i_{1c\delta}(0+) = 0.$$

В связи с тем, что для каждой из свободных составляющих необходимо определять две неизвестные постоянные интегрирования, составим вторую систему уравнений, дифференцируя первую [2]:

$$\begin{cases} \frac{di_{1c\delta}}{dt} - \frac{di_{2c\delta}}{dt} - \frac{di_{3c\delta}}{dt} = 0; \\ R \frac{di_{1c\delta}}{dt} + \frac{du_{Cc\delta}}{dt} = 0; \end{cases}$$

$$R \frac{di_{1c\delta}}{dt} + \frac{du_{Cc\delta}}{dt} = R \frac{di_{1c\delta}}{dt} + \frac{1}{C} i_{3c\delta} = 0.$$

После подстановки известных значений при  $t = (0+)$  получим:

$$\left[ \frac{di_{1c\epsilon}}{dt} \right]_{t=(0+)} = -\frac{1}{RC} i_{3c\epsilon}(0+) = -\frac{1.25}{100 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = -2.5 \cdot 10^3;$$

$$\left[ \frac{di_{3c\epsilon}}{dt} \right]_{t=(0+)} = \left[ \frac{di_{1c\epsilon}}{dt} \right]_{t=(0+)} - \left[ \frac{di_{2c\epsilon}}{dt} \right]_{t=(0+)} = -2.5 \cdot 10^3;$$

$$\left[ \frac{du_{C\epsilon\epsilon}}{dt} \right]_{t=(0+)} = -R \left[ \frac{di_{1c\epsilon}}{dt} \right]_{t=(0+)} = -100 \cdot (-2.5 \cdot 10^3) = 2.5 \cdot 10^5.$$

Выражения для свободных составляющих при двух комплексно-сопряженных корнях имеют вид [2]:

$$a_{c\epsilon} = A e^{-\delta t} \sin(\omega_{c\epsilon} t + \psi); \quad a_{c\epsilon}(0+) = A \sin \psi;$$

$$\frac{da_{c\epsilon}}{dt} = -A \delta \sin(\omega_{c\epsilon} t + \psi) + A \omega_{c\epsilon} e^{-\delta t} \cos(\omega_{c\epsilon} t + \psi);$$

$$\left[ \frac{da_{c\epsilon}}{dt} \right]_{t=(0+)} = -A \delta \sin \psi + A \omega_{c\epsilon} \cos \psi.$$

Для переходных токов и напряжения на конденсаторе получим:

$$A_1 \sin \psi_1 = 0, \quad (-A_1 \sin \psi_1 + 2A_1 \cos \psi_1) \cdot 10^3 = 2.5 \cdot 10^3;$$

$$A_2 \sin \psi_2 = -1.25, \quad (-A_2 \sin \psi_2 + 2A_2 \cos \psi_2) \cdot 10^3 = 0;$$

$$A_3 \sin \psi_3 = 1.25, \quad (-A_3 \sin \psi_3 + 2A_3 \cos \psi_3) \cdot 10^3 = -2.5 \cdot 10^3;$$

$$A_4 \sin \psi_4 = 0, \quad (-A_4 \sin \psi_4 + 2A_4 \cos \psi_4) \cdot 10^3 = 2.5 \cdot 10^3.$$

Из соответствующих пар уравнений найдем постоянные интегрирования [2]:

$$A_1 = -1.25; A_2 = -1.4; A_3 = -1.4; A_4 = 125;$$

$$\psi_1 = 0; \psi_2 = 63.5^\circ; \psi_3 = -63.5^\circ; \psi_4 = 0.$$

Решения для переходных токов и напряжения на конденсаторе имеют вид:

$$i_1 = 1.25 - 1.25 e^{-1000 t} \sin 2000 t; \quad i_2 = 1.25 - 1.4 e^{-1000 t} \sin(2000 t + 63.5^\circ);$$

$$i_3 = -1.4 e^{-1000 t} \sin(2000 t - 63.5^\circ); \quad u_c = 125 e^{-1000 t} \sin \omega t .$$

Соответствующий график изменения тока  $i_1$  показан на рисунке 1.11 [2].

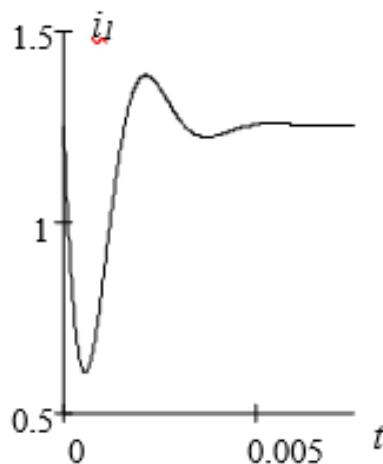


Рисунок 1.11. Переходный ток к примеру 7

**Пример 8.** Параметры цепи (рис 1.10, а)  $R = 250$  Ом,  $L = 667 \cdot 10^{-3}$  Гн,  $C = 2 \cdot 10^{-6}$  Ф,  $E = 125$  В.

Необходимо рассчитать неизвестные переходные токи и напряжение на конденсаторе [2].

До коммутации

$$i_1(0-) = 0; \quad i_2(0-) = i_2(0+) = 0; \quad i_3(0-) = 0; \quad u_C(0-) = u_C(0+) = 0 .$$

$$\text{По законам коммутации } i_2(0+) = i_2(0-) = 0; \quad u_C(0+) = u_C(0-) = 0 .$$

Принужденные составляющие токов и напряжения [2]:

$$i_{1np} = i_{2np} = E/R = 125/250 = 0.5; \quad i_{3np} = 0; \quad u_{Lnp} = u_{Cnp} = 0 .$$

Свободные составляющие независимых начальных значений:

$$i_{2c\delta}(0+) = i_2(0+) - i_{2np}(0+) = 0 - 0.5 = -0.5 ;$$

$$u_{C\delta}(0+) = u_C(0+) - u_{Cnp}(0+) = 0 - 0 = 0.$$

Корни характеристического уравнения:

$$p_{1,2} = -1/2RC \pm \sqrt{1/4R^2C^2 - 1/LC} = -1/2 \cdot 250 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \pm \\ \pm \sqrt{(1/2 \cdot 250 \cdot 2 \cdot 10^{-6})^2 - 1/667 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = -1000 \pm 500 , \\ p_1 = -500, p_2 = -1500 [2].$$

Системы уравнений для свободных составляющих имеют такой же вид, как и в примере 6. Решение систем уравнений дает следующие результаты [2]:

$$i_{1c\delta}(0+) = 0; i_{2c\delta}(0+) = -0.5; i_{3c\delta}(0+) = 0.5; u_{C\delta}(0+) = 0;$$

$$i'_{1c\delta}(0+) = -1000 ; i'_{2c\delta}(0+) = 0 ; i'_{3c\delta}(0+) = -1000 ; u'_{C\delta}(0+) = 2.5 \cdot 10^5 .$$

Выражения для свободных составляющих при двух действительных и разных корнях имеют вид [2]:

$$a_{c\delta} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} ; a_{c\delta}(0+) = A_1 + A_2 .$$

$$a'_{c\delta} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t} ; a'_{c\delta}(0+) = p_1 A_1 + p_2 A_2 .$$

В результате получим пары уравнений:

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 &= 0, & A_1 + 3A_2 &= 2; \\
A_3 + A_4 &= -0.5, & A_3 + 3A_4 &= 0; \\
A_5 + A_6 &= 0.5, & A_5 + 3A_6 &= 2; \\
A_7 + A_8 &= 0, & A_7 + 3A_8 &= -500,
\end{aligned}$$

совместные решения которых дают постоянные интегрирования:

$$A_1 = -1; A_2 = 1; A_3 = -0.75; A_4 = 0.25; A_5 = -0.25; A_6 = 0.75; A_7 = 250; A_8 = -250$$

[2].

Окончательно получим [2]:

$$i_1(t) = 0.5 - e^{-500t} + e^{-1500t}; \quad i_2(t) = 0.5 - 0.75e^{-500t} + 0.25e^{-1500t};$$

$$i_3(t) = -0.25e^{-500t} + 0.75e^{-1500t}; \quad u_C(t) = 250e^{-500t} - 250e^{-1500t}.$$

Соответствующий график изменения напряжения на конденсаторе показан на рисунке 1.12 [2].

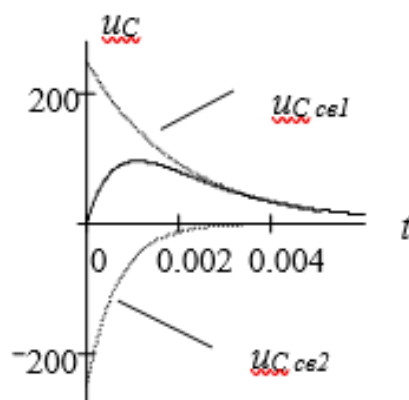


Рисунок 1.12. Переходные напряжения к примеру 8

**Пример 9.** Параметры цепи (рисунок 1.13, а)  $R = 12$  Ом,  $L = 9.55$  мГн,  $C = 796$  мкФ,  $e(t) = \sqrt{2} \cdot 220 \sin 314t$  [2].

Необходимо определить переходный ток  $i_1(t)$ .

Найдем значения корней характеристического уравнения цепи:

$$Z(p) = 1/pC + pLR / (R + pL) = 0, \quad p^2 + p/RC + 1/LC = 0.$$

$$p_{1,2} = -52.345 \pm j358.8.$$

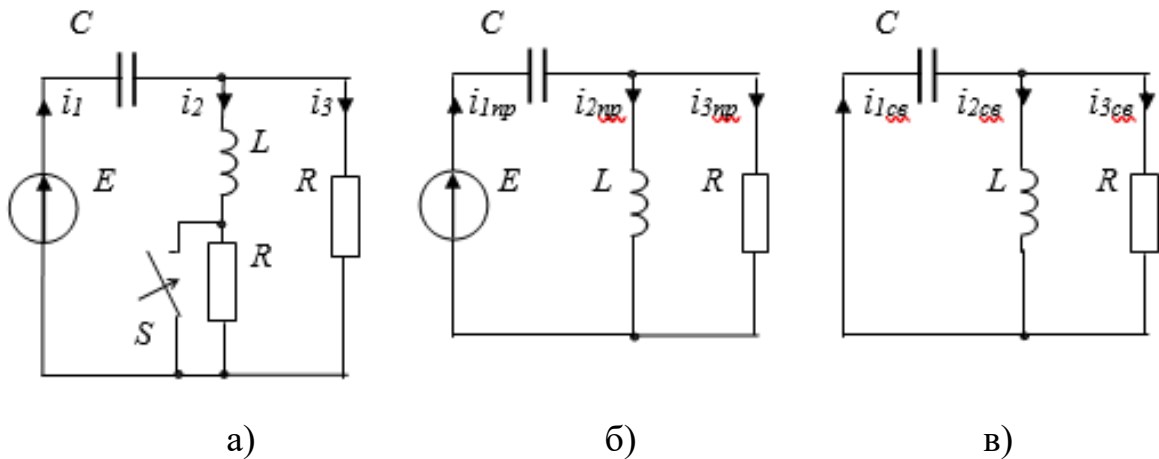


Рисунок 1.13. Расчетная схема к примеру 9

Рассчитаем установившийся режим до коммутации и определим независимые начальные значения.

$$x_C = 1/\omega C = 1/314 \cdot 796 \cdot 10^{-6} = 4, \quad x_L = \omega L = 314 \cdot 9.55 \cdot 10^{-3} = 3;$$

$$\underline{I}_{1m} = \frac{E_m}{\underline{Z}_{ex}} = \frac{E_m}{\left[ -jx_C + \frac{R(R + jx_L)}{2R + jx_L} \right]} = \frac{220\sqrt{2} \cdot e^{j0}}{\left[ -j4 + \frac{12(12 + j3)}{24 + j3} \right]} = 1.86 \cdot e^{j21^\circ};$$

$$i_1 = 1.86 \sin(314t + 21^\circ);$$

$$\underline{I}_{2m} = \underline{I}_{1m} R / (2R + jx_L) = 1.86 e^{j21^\circ} 12 / (24 + j3) = 0.92 e^{j14^\circ},$$

$$i_2 = 0.92 \sin(314t + 14^\circ);$$

$$\underline{U}_{Cm} = \underline{I}_{1m} (-jx_C) = 1.86 e^{j21^\circ} (-j4) = 7.45 e^{-j69^\circ},$$

$$u_C = 7.45 \sin(314t - 69^\circ);$$

$$i_2(0-) = i_2(0+) = 0.92 \sin 14^\circ = 0.22;$$

$$u_C(0-) = u_C(0+) = 7.45 \sin(-69^\circ) = -6.96.$$



Рассчитаем принужденный режим после коммутации (рисунок 1.13, б).

$$\underline{I}_{1m} = \underline{E}_m / \underline{Z}_m = \underline{E}_m / \left[ -jx_C + \frac{R \cdot jx_L}{R + jx_L} \right] = 220\sqrt{2} \cdot e^{j0^\circ} / \left[ -4j + \frac{j12 \cdot 3}{12 + j3} \right] = 2.14 \cdot e^{j5^\circ};$$

$$i_{1np} = 2.14 \sin(314t + 5^\circ);$$

$$\underline{I}_{2m np} = \underline{I}_{1m np} R / (R + jx_L) = 2.14 e^{j5^\circ} 12 / (12 + j3) = 2.09 e^{-j9^\circ};$$

$$i_{2np} = 2.09 \sin(314t - 9^\circ);$$

$$\underline{U}_{Cm np} = \underline{I}_{1np} (-jx_C) = 2.14 e^{j5^\circ} (-j4) = 8.57 e^{-j85^\circ};$$

$$u_{Cnp} = 8.57 \sin(314t - 85^\circ);$$

$$i_{2np}(0+) = 2.09 \sin(-9^\circ) = -0.33,$$

$$u_{Cnp}(0+) = 8.57 \sin(-85^\circ) = -8.54.$$

Найдем свободные составляющие независимых начальных значений [2]:

$$i_{2c6}(0+) = i_2(0+) - i_{2np}(0+) = 0.22 - (-0.33) = 0.55;$$

$$u_{Cc6}(0+) = u_c(0+) - u_{Cnp}(0+) = -6.96 - (-8.54) = 1.58.$$

Найдем свободные составляющие зависимых начальных значений (рисунок 1.13, в). Для этого составим необходимую систему уравнений и рассмотрим её при  $t = (0+)$  [2]:

$$\begin{cases} i_{1c6}(0+) = i_{2c6}(0+) + i_{3c6}(0+); \\ u_{Cc6}(0+) = -i_{3c6}(0+)R; \\ u_{Lc6}(0+) = L i'_{2c6}(0+) = R i_{3c6}(0+), \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{откуда } i_{1c6}(0+) = i_{2c6}(0+) + i_{3c6}(0+) = 0.55 - 0.13 = 0.42.$$

Запишем свободные составляющие в общем виде:

$$\begin{aligned} i_{1c\delta} &= A e^{-\delta t} \sin(\omega_{c\delta} t + \psi_1), & i_{1c\delta}(0+) &= A \sin \psi_1; \\ i_{2c\delta} &= B e^{-\delta t} \sin(\omega_{c\delta} t + \psi_2), & i_{2c\delta}(0+) &= B \sin \psi_2; \\ u_{C_{c\delta}} &= C e^{-\delta t} \sin(\omega_{c\delta} t + \psi_3), & u_{C_{c\delta}}(0+) &= C \sin \psi_3. \end{aligned}$$

В данных трёх уравнения шесть неизвестных. Для получения полной системы продифференцируем уравнения [2]:

$$\begin{aligned} i'_{1c\delta} &= A e^{-\delta t} \omega_{c\delta} \cos(\omega_{c\delta} t + \psi_1) - A \delta e^{-\delta t} \sin(\omega_{c\delta} t + \psi_1); \\ i'_{2c\delta} &= B e^{-\delta t} \omega_{c\delta} \cos(\omega_{c\delta} t + \psi_2) - B \delta e^{-\delta t} \sin(\omega_{c\delta} t + \psi_2); \\ u'_{C_{c\delta}} &= C e^{-\delta t} \omega_{c\delta} \cos(\omega_{c\delta} t + \psi_3) - C \delta e^{-\delta t} \sin(\omega_{c\delta} t + \psi_3); \\ i'_{1c\delta}(0+) &= A \omega_{c\delta} \cos \psi_1 - A \delta \sin \psi_1; \\ i'_{2c\delta}(0+) &= B \omega_{c\delta} \cos \psi_2 - B \delta \sin \psi_2; \\ u'_{C_{c\delta}}(0+) &= C \omega_{c\delta} \cos \psi_3 - C \delta \sin \psi_3. \end{aligned}$$

Для определения значений левых частей продифференцируем систему уравнений (\*) и рассмотрим ее при  $t = (0+)$ :

$$\begin{cases} i'_{1c\delta}(0+) = i'_{2c\delta}(0+) + i'_{3c\delta}(0+); \\ u'_{C_{c\delta}}(0+) = -i'_{3c\delta}(0+) R; \\ L i'_{2c\delta}(0+) = R i'_{3c\delta}(0+), \end{cases}$$

Учитывая, что  $i_1 = C du_C / dt$ , получим [2]:

$$\begin{aligned} u'_{C_{c\delta}}(0+) &= i_{1c\delta}(0+) / C = 0.42 / 796 \cdot 10^{-6} = 527.64; \\ i'_{3c\delta}(0+) &= -u'_{C_{c\delta}}(0+) / R = -527.64 / 12 = -43.9; \\ i'_{2c\delta}(0+) &= R i'_{3c\delta}(0+) / L = -0.13 \cdot 12 / 9.55 \cdot 10^{-3} = -163.28; \end{aligned}$$

$$i'_{1ce}(0+) = i'_{2ce}(0+) + i'_{3ce}(0+) = -163.28 - 43.97 = -207.25 .$$

В результате получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} -207.25 &= 358.8A \cos \psi_1 - 52.345A \sin \psi_1, \\ -163.28 &= 358.8B \cos \psi_2 - 52.345B \sin \psi_2, \\ 527.64 &= 358.8C \cos \psi_3 - 52.345C \sin \psi_3, \end{aligned}$$

$$0.42 = A \sin \psi_1;$$

$$0.55 = B \sin \psi_2;$$

$$1.58 = C \sin \psi_3.$$

Данные пары уравнений позволяют найти постоянные интегрирования  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и начальные фазы  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$ . Нам нужно найти только ток  $i_1$ , поэтому определим  $A$  и  $\psi_1$ :

$$\begin{cases} 0.42 = A \sin \psi_1; \\ -207.25 = 358.8A \cos \psi_1 - 52.345A \sin \psi_1, \end{cases}$$

откуда  $A = -0.636$ ;  $\psi_1 = -41.32^\circ$  [2].

Окончательно получим:

$$i_1 = i_{1np} + i_{1ce} = 2.14 \sin(314t + 5^\circ) - 0.636 \sin(358.8t - 41.32^\circ) e^{-52.345t} .$$

График переходного тока и его составляющих показан на рисунке 1.14.

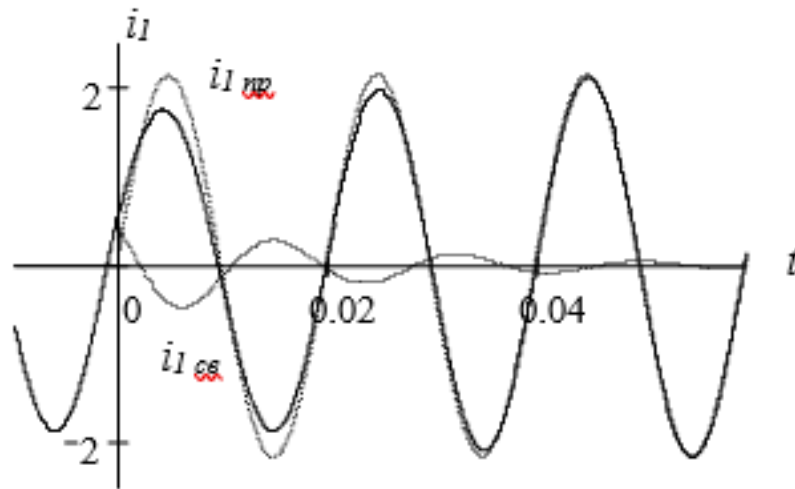


Рисунок 1.14. Переходный ток к примеру 9

**Пример 10.** К источнику постоянной ЭДС подключается  $RLC$  ветвь.  $R = 1000$  Ом,  $L = 0.1$  Гн,  $C = 0.1 \cdot 10^{-6}$  Ф,  $E = 100$  В [2].

Необходимо получить выражение для тока в ветви [2].

Найдём корни характеристического уравнения цепи и определим характер переходного процесса. При заданных параметрах элементов цепи корни одинаковые:  $p_{1,2} = 10000$ . Характер переходного процесса критический. Принуждённый ток в ветви равен нулю. Решение для переходного тока имеет вид:  $i(t) = (A_1 + A_2 t) e^{pt}$ . Для определения двух постоянных интегрирования необходимо два уравнения. Второе уравнение получим, дифференцируя решение [2]:

$$i'(t) = (A_1 p + A_2 + A_2 p t) e^{pt}.$$

Найдём левые части уравнений при  $t = 0$ :  $i(0) = 0$ ,  $i'(0) = E/L$ . Второе начальное значение найдено через напряжение на индуктивности [2].

Решая совместно полученные два уравнения при  $t = 0$  получим  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = 1000$ . Выражение для тока примет вид:  $i(t) = 1000 t e^{-10000t}$ . Соответствующая

зависимость, подтверждающая критический характер переходного процесса, приведена на рисунке 1.15 [2].

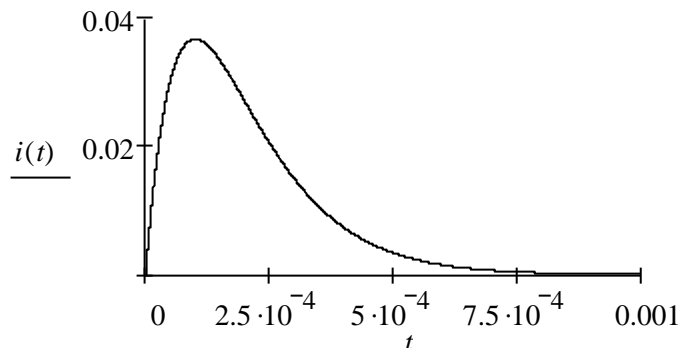


Рисунок 1.15. Переходный ток к примеру 10

## 1.2 Операторный метод анализа переходных процессов

При операторном методе анализа динамических режимов функция времени  $f(t)$ , называемая оригиналом, с помощью преобразования Лапласа замещается функцией  $F(p)$ , называемой изображением. Уравнения для изображений токов и напряжений составляются на основе законов Кирхгофа для операторных схем замещения исследуемой цепи. Исследуемая электрическая цепь должна быть линейной [2].

Следует помнить, что при переходе от оригиналов к изображениям начало системы координат должно быть совмещено с моментом коммутации. Это учитывается впоследствии соответствующим смещением решения [2].

В задачах с периодическими источниками операторным методом находят только свободные составляющие переходных токов и напряжений [2].

На схеме замещения переменные  $i(t)$ ,  $u(t)$  замещаются их операторными изображениями  $I(p)$ ,  $U(p)$  [2]. Постоянные величины  $E$ ,  $J$  имеют изображения  $E/p$  и  $J/p$ . Индуктивности замещаются последовательным соединением операторного сопротивления  $pL$  и источника внутренней ЭДС  $Li(0)$  [2]. Ёмкости замещаются последовательным соединением операторного

сопротивления  $1/pC$  и источника внутренней ЭДС  $U_C(0)/p$ . Направление внутренней ЭДС  $Li(0)$  совпадает с направлением тока  $i(t)$ , а внутренняя ЭДС  $U_C(0)/p$  направлена против тока [2]. Изображения напряжений на индуктивностях и ёмкостях при ненулевых начальных условиях определяются по следующим формулам [2]:

$$U_C(p) = I(p)/pC + U_C(0)/p; \quad U_L(p) = pLI(p) - Li(0). \quad (1.6)$$

Если операторным методом ищутся свободные составляющие переходных токов и напряжений, то внутренние ЭДС определяются также через свободные составляющие начальных значений  $Li_{cs}(0)$  и  $U_{Ccs}(0)/p$  [2].

При наличии участков с индуктивно связанными цепями целесообразно произвести развязку индуктивных связей, а потом заменить оригиналы изображениями [2].

### **Последовательность расчета переходного процесса.**

1. Составляем операторную схему замещения электрической цепи после коммутации и записываем систему алгебраических уравнений состояния цепи в операторной форме в соответствии с выбранным методом анализа.
2. Решаем систему уравнений относительно изображений искомых величин.
3. По найденным изображениям находим оригиналы с помощью таблиц, связывающих оригиналы и изображения или с помощью теоремы разложения.

Если изображение искомого тока или напряжения имеет вид дроби  $F(p) = N(p)/M(p)$ , причём степень  $N(p)$  относительно  $p$  ниже степени  $M(p)$ , а корни  $p$  в уравнении  $M(p) = 0$  различны, то оригинал определяется по следующей формуле теоремы разложения [2]:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (1.7)$$

Если уравнение  $M(p_k) = 0$  имеет пару комплексно-сопряжённых корней  $p_{1,2} = -\delta \pm \omega_{св}$ , то оригинал определяется по формуле:

$$f(t) = 2 \left| \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} \right| e^{-\delta t} \cos(\omega_{св} t + \theta) \quad (1.8)$$

где  $\theta = \psi_{N(p_1)} - \psi_{M'(p_1)}$ .

Существуют формулы и для случая кратных корней  $M(p) = 0$  [2].

Если источник синусоидальный, то его изображение имеет достаточно сложный вид, поэтому рекомендуется операторным методом определять только свободные составляющие токов и напряжений, а принуждённые составляющие искать с помощью символического (комплексного) метода [2].

Из приведённых ниже примеров видно, что постоянные интегрирования определяются при переходе от изображений к оригиналам. Это существенно упрощает решение задач высокого порядка [2].

**Рассмотрим примеры расчета переходного процесса операторным методом в электрической цепи первого порядка.**

**Пример 11.** Параметры цепи (рисунок 1.1, а, пример 1)  $R_1 = R_2 = R_3 = 50$  Ом,  $C = 100$  мкФ,  $E = 150$  В [2].

Необходимо рассчитать переходные токи  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  и переходное напряжение  $u_c$  операторным методом [2].

Определим искомые токи и напряжение двумя способами [2].

Первый способ (ищутся переходные токи и напряжения):

Операторная схема замещения для определения переходных токов и переходного напряжения на конденсаторе показана на рисунке 1.16, а. Воспользуемся методом узловых потенциалов. В примере 1 было найдено, что  $u_C(0)=50$  В, а  $u_{Ccs}(0)= -25$  В.

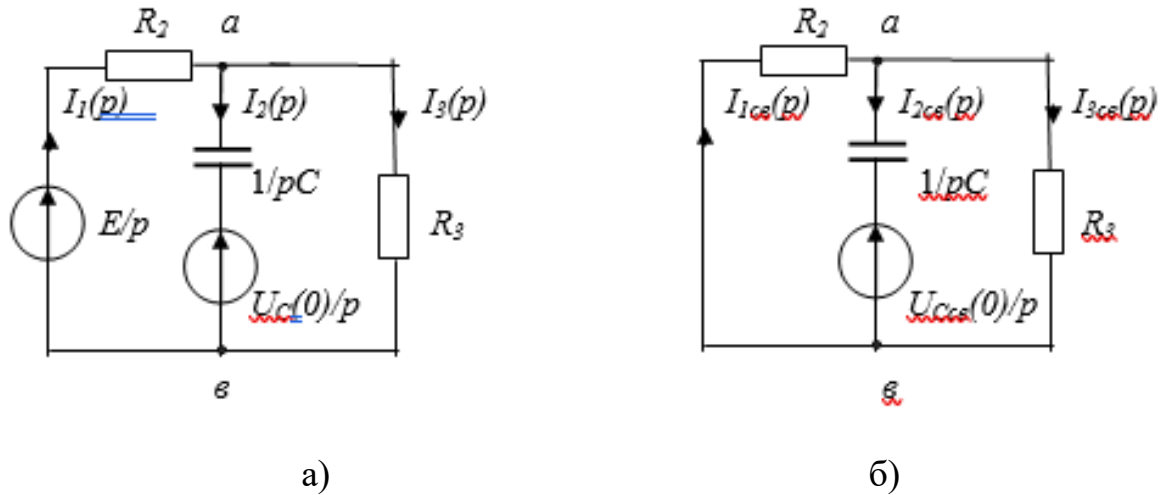


Рисунок 1.16. Расчетная схема к примеру 11

$$U_{ab}(p) = U_C(p) = \left[ \frac{E}{p} \frac{1}{R_2} + \frac{U_C(0)}{p} pC \right] / \left[ \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + pC \right] =$$

$$\left( \frac{150}{p} \frac{1}{50} + \frac{50}{p} p \cdot 100 \cdot 10^{-6} \right) / \left( \frac{1}{50} + \frac{1}{50} + p \cdot 100 \cdot 10^{-6} \right) = (50 + 0,25p) / p \cdot (2 + 50 \cdot 10^{-3} p) .$$

Полученное выражение  $N(p)/M(p) = (150 + 0,25p) / (50 \cdot 10^{-3} p^2 + 2p)$  является рациональной дробью, следовательно, для нахождения оригинала можно воспользоваться формулой разложения [2]:

$$u_C(t) = \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{N(p_2)}{M'(p_2)} e^{p_2 t} .$$

Найдём корни  $M(p_k) = 0$ .  $p(2 + 50 \cdot 10^{-3} p) = 0$ .  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -400$  [2].

Производная  $M'(p) = 2 + 10^{-2} p$ .



$$\text{Оригинал } u_{ab}(t) = u_C(t) = \frac{150}{2} e^{0t} + \frac{150 - 0,25 \cdot 400}{2 - 10^2 \cdot 400} e^{-400t} = 75 - 25e^{-400t}.$$

Найдём переходные токи.

$$i_1(t) = (E - u_{ab})/R = (150 - 75 + 25e^{-400t})/50 = 1.5 + 0.5e^{-400t},$$

$$i_3(t) = u_{ab}/R_3 = 75 - 25e^{-400t} = 1.5 - 0.5e^{-400t}.$$

Второй способ (ищутся свободные составляющие переходных токов и напряжений):

Свободные составляющие переходных токов и напряжения можно определить отдельно, воспользовавшись схемой замещения (рисунок 1.16, б), где  $u_{Ccs}(0) = -25$  В [2].

$$u_{Ccs}(p) = u_{ab}(p) = (pC u_{Ccs}(0)/p) / (1/R_2 + 1/R_3 + pC) =$$

$$(-p \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot 25/p) / (1/50 + 1/50 + p \cdot 100 \cdot 10^{-6}) = -0.125/2 + 5 \cdot 10^{-3} \cdot p = N(p)/M(p).$$

Корень уравнения  $M(p) = 2 + 5 \cdot 10^{-3} \cdot p = 0$ ;  $p = -2/5 \cdot 10^{-3} = -400$  [2].

Производная  $M'(p) = 5 \cdot 10^{-3}$ .

Оригинал свободной составляющей напряжения на конденсаторе:

$$u_{Ccs}(t) = -\frac{0,125}{5 \cdot 10^{-3}} e^{-400t} = -25e^{-400t} [2].$$

Оригиналы свободных составляющих токов:

$$i_{1cs}(t) = (\varphi_b - \varphi_a)/R_1 = -U_{ab}/R_1 = -25e^{-400t}/50 = 0.5e^{-400t},$$

$$i_{3cs}(t) = U_{ab}/R_3 = -0.5e^{-400t} [2].$$

**Пример 12.** По данным примера 2 (рисунок 1.3, а) определить свободные составляющие токов и напряжения на индуктивности [2].

В примере 2 найдено, что в момент коммутации  $i_{2c6}(0) = -6$  А, а  $i_{3c6}(t) = 0$ . Операторная схема замещения для свободных составляющих показана на рисунке 1.17 [2].

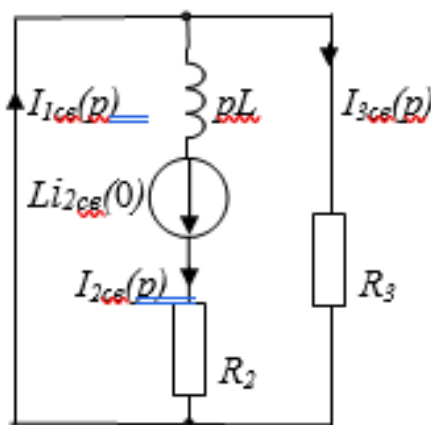


Рисунок 1.17. Расчетная схема к примеру 12

$$I_{2c6}(p) = I_{1c6}(p) = L \cdot i_{1c6}(p) / (pL + R_2) = -6 \cdot 10^{-3} / (p \cdot 10^{-3} + 2) = N(p) / M(p).$$

Из уравнения  $M(p) = p \cdot 10^{-3} + 2 = 0$  найдём корень  $p = -2000$  [2].

Производная  $M'(p) = 10^{-3}$ .

Оригиналы свободных составляющих [2]:

$$i_{2c6}(t) = i_{1c6}(t) = -6 \cdot 10^{-3} / 10^{-3} e^{-2000t} = -6 e^{-2000t},$$

$$u_{Lc6}(t) = L di_{2c6} / dt = 2000 \cdot 10^{-3} \cdot 6 e^{-2000t} = 12 e^{-2000t}.$$

**Пример 13.** По данным примера 3 (рисунок 1.5, а) рассчитать токи и напряжения в цепи после коммутации [2].

Операторная схема замещения для переходных токов показана на рисунке 1.18, где внутренняя ЭДС  $Li_2(0)$  отсутствует, так как [2]:

$$i_2(0+) = i_2(0-) = i(0) = 0 .$$

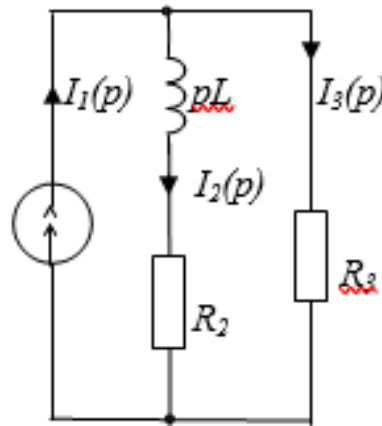


Рисунок 1.18. Расчетная схема к примеру 13

Изображение второго тока

$$I_2(p) = (J/p) \cdot R_3 / (R_2 + R_3 + pL) = 24/p \cdot (4 + p \cdot 10^{-3}) = N_1(p) / M_1(p) ,$$

откуда  $M_1'(p) = 4 + 2 \cdot 10^{-3} p$ ,  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -4000$ .

Оригинал второго тока

$$\begin{aligned} i_2(t) &= \frac{N_1(p_1)}{M_1'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{N_2(p_2)}{M_2'(p_2)} e^{p_2 t} = \frac{24}{4} e^{0t} + \frac{24}{4 - 2 \cdot 10^{-3} \cdot 4000} e^{-4000 t} = \\ &= 6 - 6 e^{-4000 t} . \end{aligned}$$

Изображение напряжения на индуктивности

$$U_L(p) = I_2(p) \cdot pL = p \cdot 10^{-3} \cdot 24/p \cdot (4 + p \cdot 10^{-3}) = 24 \cdot 10^{-3} / (4 + p \cdot 10^{-3}) = N_2(p) / M_2(p),$$

откуда  $p = -4000$ ,  $M_2'(p) = 10^{-3}$  [2].

Оригинал напряжения на индуктивности [2]:

$$u_L(t) = \frac{N_2(p_2)}{M_2'(p_2)} e^{pt} = \frac{24 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}} e^{-4000t} = 24 e^{-4000t}.$$

**Пример 14.** По условиям примера 4 найти свободные составляющие переходных токов и переходного напряжения на конденсаторе операторным методом [2].

Из примера 4 известно, что в момент коммутации  $u_{C_{св}}(0) = 0,5$  В.

Операторная схема замещения для расчета свободных составляющих показана на рисунке 1.19.

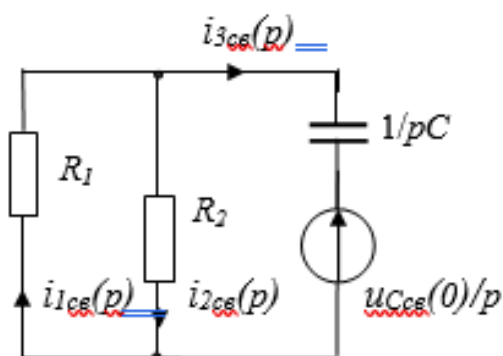


Рисунок 1.19. Расчетная схема к примеру 14

Используя метод свёртки, получим [2]:

$$I_{3c6}(p) = -\frac{u_{C_{c6}}(0)}{p} \left/ \left( \frac{1}{pC} + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \right) \right. = -\frac{u_{C_{c6}}(0) \cdot C(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + pCR_1R_2} = =$$

$$-\frac{0,81 \cdot 10^{-3}}{72 + p \cdot 28,8 \cdot 10^{-3}} = \frac{N(p)}{M(p)},$$

$$p = -72/28,8 \cdot 10^{-3} = -2500, \quad M'(p) = 28,8 \cdot 10^{-3},$$

$$i_{3c6}(t) = -0,81 \cdot 10^{-3} / 28,8 \cdot 10^{-3} e^{-2500t} = -0,028125 e^{-2500t},$$

$$i_{1c6}(t) = -i_{3c6}(t) \cdot R_2 / (R_1 + R_2) = 0,028125 e^{-2500t} \cdot 32/72 = 0,0125 e^{-2500t},$$

$$i_{2c6}(t) = -i_{3c6}(t) \cdot R_1 / (R_1 + R_2) = 0,028125 e^{-2500t} \cdot 40/72 = 0,015625 e^{-2500t},$$

$$u_{C_{c6}}(t) = i_{2c6}(t) \cdot R_2 = 32 \cdot 0,015625 e^{-2500t} = 0,5 e^{-2500t}.$$

Рассмотрим примеры расчета переходного процесса операторным методом в электрической цепи второго порядка [2].

**Пример 15.** Параметры цепи (рисунок 1.20, а)  $E = 200$  В,  $R_1 = 20$  Ом,  $R_2 = 80$  Ом,  $R_3 = 100$  Ом,  $L = 40$  мГн,  $C = 40$  мкФ. Необходимо рассчитать переходные токи [2].

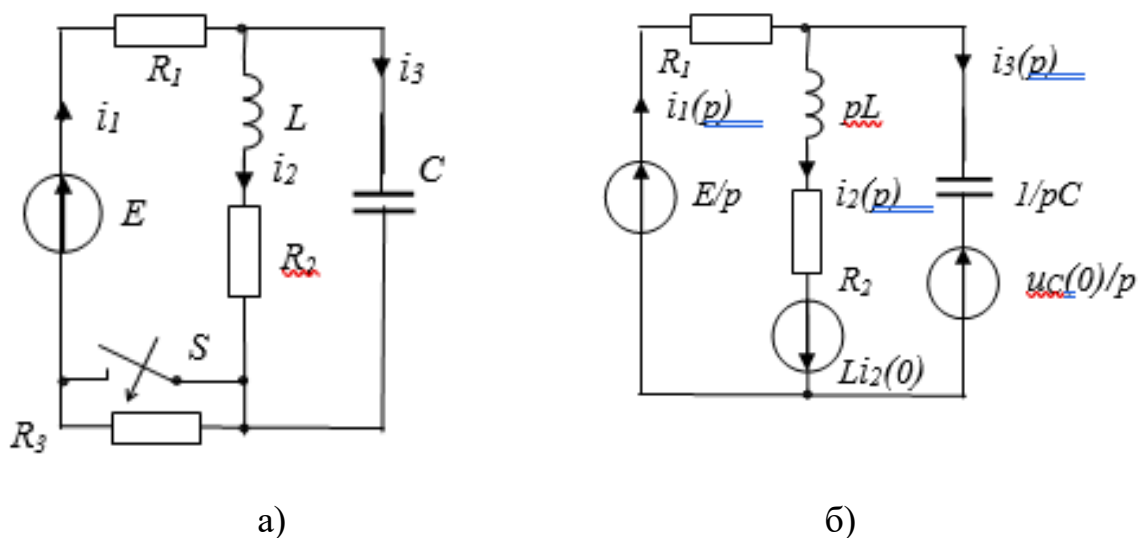


Рисунок 1.20. Расчетная схема к примеру 15

Операторная схема замещения цепи для расчета переходных токов показана на рисунке 1.20, б.

Составим систему уравнений относительно переходных токов по законам Кирхгофа.

$$\begin{cases} I_1(p) - I_2(p) - I_3(p) = 0; \\ R_1 \cdot I_1(p) + (R_2 + pL) \cdot I_2(p) = E/p + L \cdot i_2(0); \\ R_1 \cdot I_1(p) + 1/pC \cdot I_3(p) = E/p - U_C(0)/p, \end{cases}$$

где  $i_2(0) = i_2(0-) = E/(R_1 + R_2 + R_3) = 1$ ,

$$u_C(0) = u_C(0-) = R_2 \cdot E / (R_1 + R_2 + R_3) = 80 [2].$$

Решая систему уравнений, найдём изображения искомых токов [2].

Воспользуемся методом определителей:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 + pL & 0 \\ R_1 & 0 & 1/pC \end{vmatrix} = [R_1 L C p^2 + (R_1 R_2 C + L)p + R_1 + R_2] / pC = \\ &= \frac{32 \cdot 10^{-6} p^2 + 104 \cdot 10^{-3} p + 100}{40 \cdot 10^{-6} p}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ R_1 & R_2 + pL & E/p + Li_2(0) \\ R_1 & 0 & E/p - U_C(0)/p \end{vmatrix} = \frac{1}{p} \{ [E - U_C(0) - R_1 i_2(0)] Lp + \\ &+ R_2 [E - U_C(0)] - R_1 U_C(0) \} = (4p + 8 \cdot 10^3) / p; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & E/p + Li_2(0) & 0 \\ R_1 & E/p - U_C(0)/p & 1/pC \end{vmatrix} = \frac{1}{p^2 C} \{ R_1 L C i_2(0) p^2 + \\ &+ [R_1 C U_C(0) + Li_2(0)] p + E \} = \frac{32 \cdot 10^{-6} p^2 + 104 \cdot 10^{-3} p + 200}{40 \cdot 10^{-6} p^2}. \end{aligned}$$

Изображения токов:

$$I_2(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{32p + 104 \cdot 10^{-3} p + 200}{p(32 \cdot 10^{-6} p^2 + 104 \cdot 10^{-3} p + 100)} = \frac{N_1(p)}{M_1(p)};$$

$$I_3(p) = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0,16 \cdot 10^{-3} p + 0,32}{32 \cdot 10^{-6} p^2 + 104 \cdot 10^{-3} p + 100} = \frac{N_2(p)}{M_2(p)}.$$

Найдём оригиналы токов  $i_2(t)$  и  $i_3(t)$  по формуле разложения:

$$i_2(t) = \sum_{k=1}^n \frac{N_1(p_k)}{M_1'(p_k)} e^{p_k t},$$

где  $p_k$  - корни знаменателя  $M_1(p) = 0$  [2].

Корни равны  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -1.643 \cdot 10^3 c^{-1}$ ,  $p_3 = -7.607 \cdot 10^3 c^{-1}$ .

Производная  $M_1'(p) = 96 \cdot 10^{-6} p^2 + 208 \cdot 10^{-3} p + 100$ .

Используя значения  $p_k$ , находим переходные токи [2]:

$$i_2(t) = \frac{200}{100} e^{0 \cdot t} + \frac{100}{-78.57} e^{-1643t} + \frac{100}{362.96} e^{-7607t} = 2 - 1.27e^{-1643t} + 0.27e^{-7607t}.$$

$$i_3(t) = 5.33e^{-1643t} - 0.33e^{-7607t} \quad i_1 = i_2 + i_3.$$

Зависимости токов и  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  приведены на рисунке 1.21.

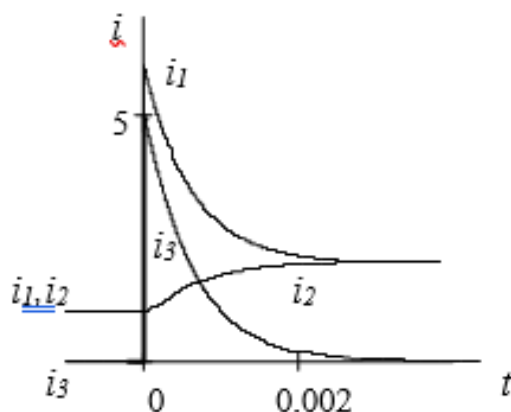


Рисунок 1.21. Переходные напряжения к примеру 15

**Следующие задачи решить самостоятельно классическим и операторным методами**

1. Определить ток в резисторе  $R_1$  после размыкания ключа (рисунок 1.22), если  $R_1=R_2=5$  Ом,  $R_3=10$  Ом,  $C=10$  мкФ,  $E_1=5$  В,  $E_2=20$  В [2].

2. Определить ток  $i_1$  после замыкания ключа (рисунок 1.23), если  $R_1=5$  Ом,  $R_2=R_3=10$  Ом,  $C=100$  мкФ,  $E=15$  В.

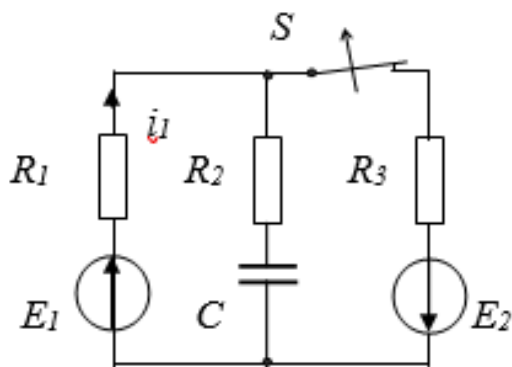


Рисунок 1.22

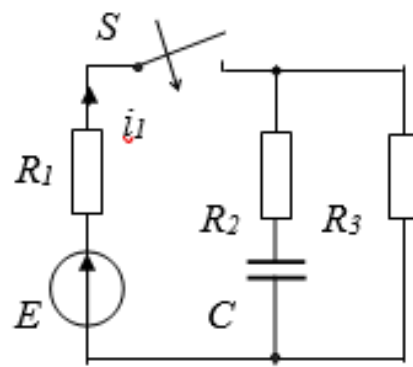


Рисунок 1.23

3. Определить ток  $i_1$  (рисунок 1.24), если  $R_1=10$  Ом,  $R_2=10$  Ом,  $C=1$  мкФ,  $E=10$  В. Расчёт выполнить для заданных независимых начальных значений: а)  $u_C(0)=0$ ; б)  $u_C(0)=5$  В; в)  $u_C(0)=10$  В [2].



4. В цепи (рисунок 1.25) ключ замыкает накоротко резистор  $R$ . Определить  $i_1$  после коммутации, если  $R = 15 \text{ Ом}$ ,  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = R_3 = 10 \text{ Ом}$ ,  $C = 100 \text{ мкФ}$ ,  $E = 15 \text{ В}$  [2].

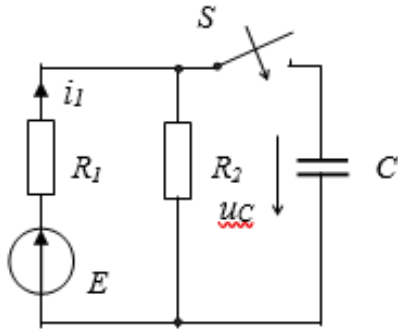


Рисунок 1.24

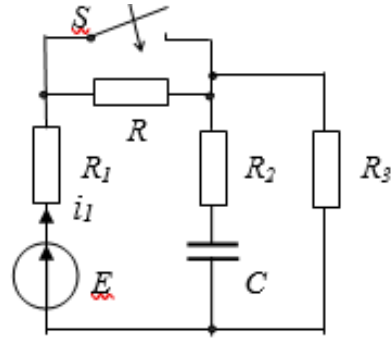


Рисунок 1.25

5. Ключ в цепи (рисунок 1.26) замыкается. Определить  $i_1$  после коммутации, если  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10 \text{ Ом}$ ,  $C = 1 \text{ мкФ}$ ,  $E = 60 \text{ В}$  [2].

6. Электромагнит постоянного тока имеет сопротивление  $R_L = 10 \text{ Ом}$  и индуктивность  $L = 0.5 \text{ Гн}$ . Напряжение источника  $U = 200 \text{ В}$ . Определить величину сопротивления  $R$  шунтирующего обмотку электромагнита (рисунок 1.27), при котором напряжение на обмотке электромагнита в момент отключения его от источника не превышает  $600 \text{ В}$ . Построить графики тока  $i_2$  и напряжения на электромагните [2].

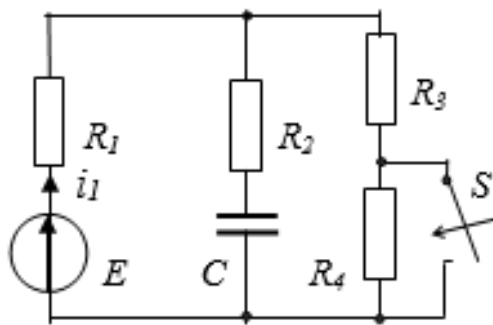


Рисунок 1.26

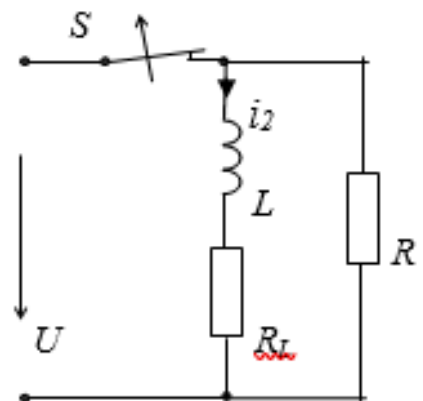


Рисунок 1.27

7. Обмотка соленоидного привода (рисунок 1.28) имеет сопротивление  $R_L=1$  Ом и индуктивность  $L = 2.88$  Гн. Последовательно с обмоткой включено добавочное сопротивление  $R$ . Цепь привода подключается к источнику постоянного напряжения. Установившийся ток  $I = 50$  А. Сердечник привода начинает движение при токе 25 А. Надо определить величину добавочного сопротивления и напряжение источника, если движение сердечника должно начаться через 0.5 с. после коммутации [2].

8. Определить ток  $i_1$  после замыкания ключа (рисунок 1.29), если  $R_1 = R_2 = R_3 = 10$  Ом,  $L = 1$  Гн,  $E = 60$  В [2].

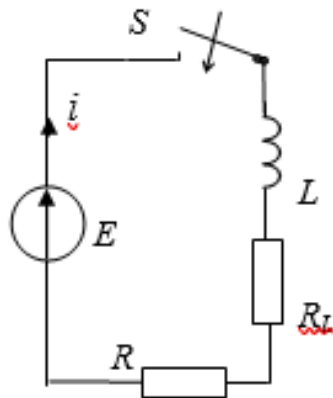


Рисунок 1.28

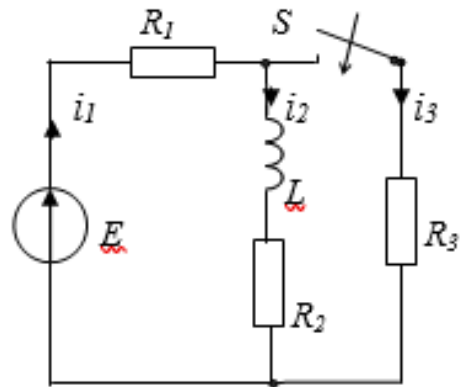


Рисунок 1.29

9. В цепи (рисунок 1.30) размыкается ключ. Определить ток  $i_3$  после коммутации, если  $R_1 = R_2 = 5$  Ом,  $R_3 = R_4 = 2.5$  Ом,  $L = 10$  мГн,  $E = 30$  В [2].

10. Определить ток  $i$  после замыкания ключа (рисунок 1.31). Параметры цепи  $J = 2$  А,  $R = 4$  Ом,  $L = 0,1$  Гн [2].

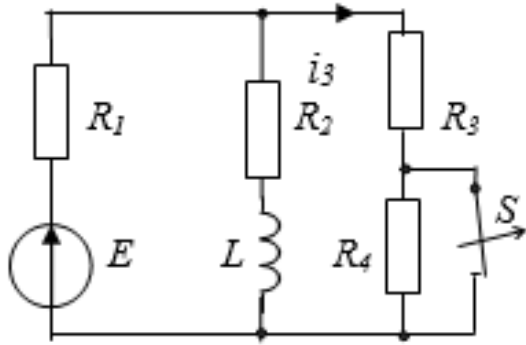


Рисунок 1.30

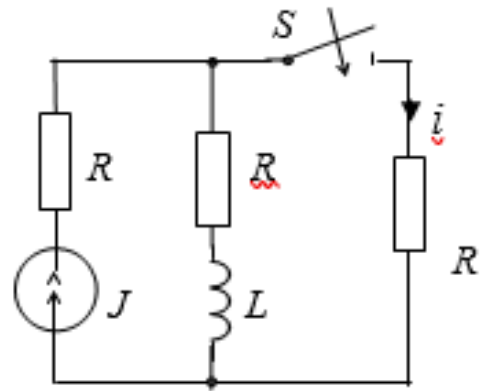


Рисунок 1.31

11. Цепь, состоящая из включенных последовательно сопротивления  $R = 10$  Ом и конденсатора  $C = 100$  мкФ (рисунок 1.32), подключается в момент  $t = 0$  к генератору синусоидальной ЭДС  $e = 100 \sin 1000t$  В. Определить ток в цепи после коммутации [2].

12. Определить ток в резисторе  $R_3$  (рисунок 1.33) после коммутации.  $R_1 = R_2 = R_3 = 10$  Ом,  $C = 300$  мкФ,  $e = 100 \sin(314t + \psi)$  В. Ключ замыкается в момент времени  $t = 0$ , при этом ЭДС генератора  $e(0) = E_m / 2$ , а  $de/dt > 0$  [2].

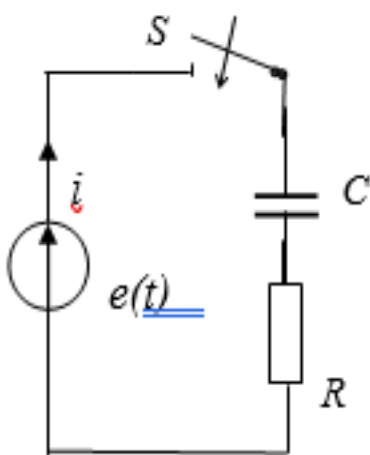


Рисунок 1.32

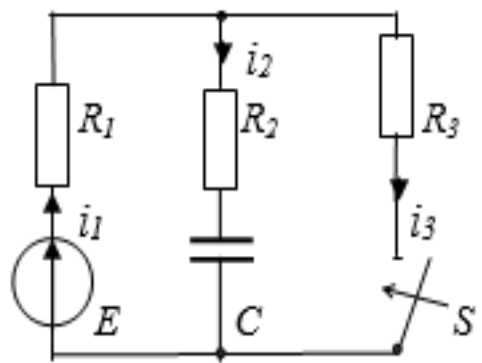


Рисунок 1.33

13. В цепи (рисунок 1.34) ключ переключается в момент  $t = 0$  из первого положения во второе.  $R_1 = R_2 = 10$  Ом,  $L = 10$  мГн,  $C = 100$  мкФ,  $E = 30$  В,  $e = 10\sqrt{2} \sin(10^3 t + 135^\circ)$  В. Определить ток  $i_2$  после коммутации [2].

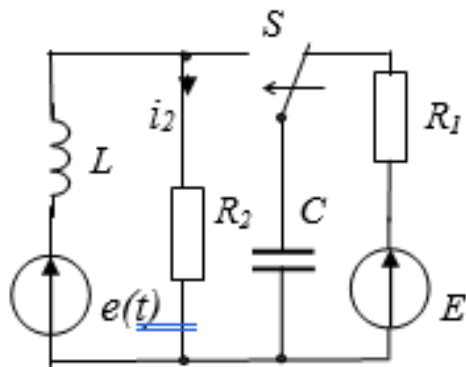


Рисунок 1.34

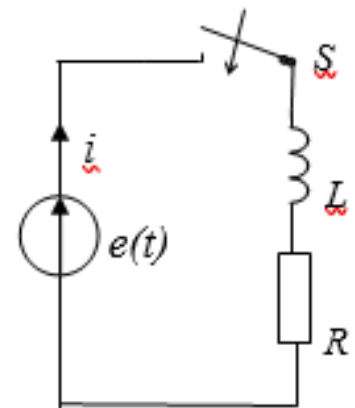


Рисунок 1.35

15. Ключ (рисунок 1.36) отключается в момент  $t = 0$ . Определить ток в цепи после коммутации, если  $R = 10$  Ом,  $L = 0,01$  Гн,  $e = 100 \sin 1000t$  В.

16. Определить ток  $i$  после коммутации (рисунок 1.37), если  $R = 10$  Ом,  $L = 0.01$  Гн,  $E = 400$  В,  $e = 100\sqrt{2} \sin(1000t + 15^\circ)$  В [2].

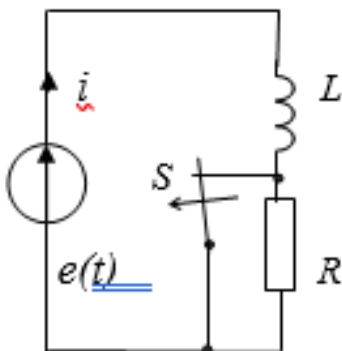


Рисунок 1.36

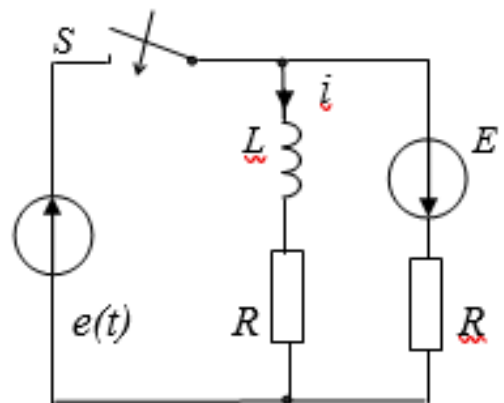


Рисунок 1.37

17. Ключ (рисунок 1.38) отключается, когда синусоидальный ток генератора имеет максимальное значение 100 А. Определить ток в цепи после коммутации, если  $L = 100$  мГн,  $R_1 = 1$  Ом,  $R_2 = 9$  Ом,  $R_3 = 1.12$  Ом,  $f = 50$  Гц [2].

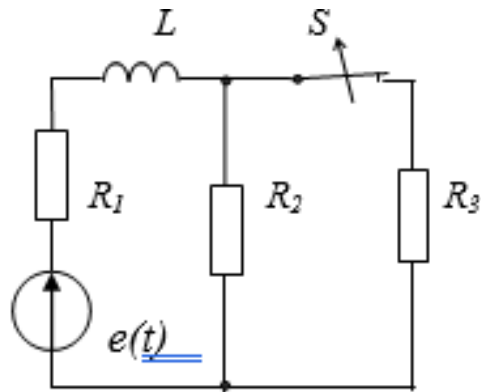


Рисунок 1.38

18. Ключ (рисунок 1.39) замыкается в момент  $t = 0$ . Определить ток в сопротивлении  $R_3$  после коммутации, если  $R_1 = R_2 = R_3 = 10$  Ом,  $L = 0,01$  Гн,  $e = 120 \sin(314t + 30^\circ)$  [2].

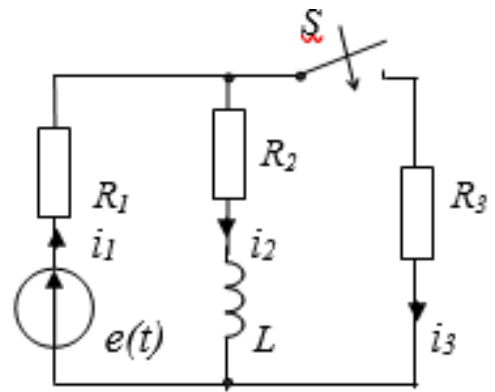


Рисунок 1.39

19. Определить ток  $i$  (рисунок 1.40) после замыкания ключа, если  $R = 10$  Ом,  $L = 1$  Гн,  $C = 10^{-3}$  Ф,  $U = 100$  В [2].

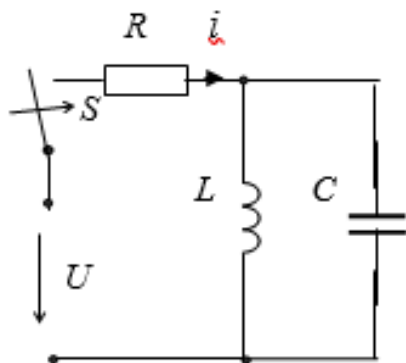


Рисунок 1.40

20. Параметры цепи (рисунок 1.41)  $R_1 = R_2 = 10$  Ом,  $L = 5$  мГн,  $C = 10$  мкФ,  $E = 100$  В. Определить ток  $i_2$  после коммутации.

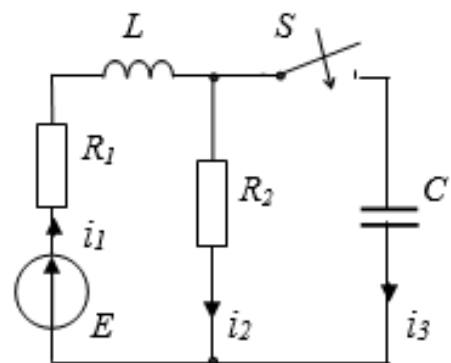


Рисунок 1.41

21. Параметры цепи (рисунок 1.42)  $R_1 = R_3 = 10 \text{ Ом}$ ,  $L = 1 \text{ Гн}$ ,  $C = 1000 \text{ мкФ}$ ,  $E = 100 \text{ В}$ . Построить график тока  $i_3$  после коммутации [2].

22. В электрической цепи (задача 20) определить  $u_L$  после коммутации [2].

23. Определить все токи после замыкания ключа (рисунок 1.43). Параметры цепи  $R_1 = R_2 = R_3 = 10 \text{ Ом}$ ,  $L = 20 \text{ мГн}$ ,  $C = 200 \text{ мкФ}$ ,  $E = 1 \text{ В}$  [2].

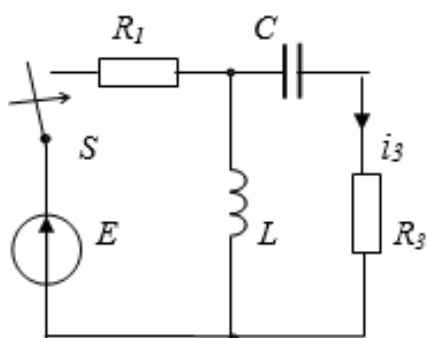


Рисунок 1.42

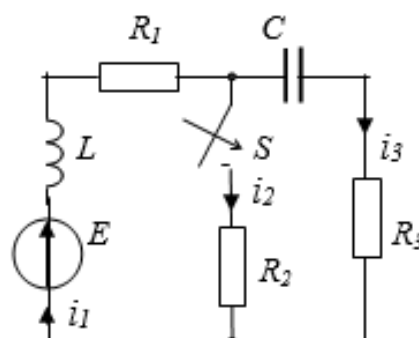


Рисунок 1.43

24. Определить ток через конденсатор после замыкания ключа (рисунок 1.44), если  $R = 10 \text{ Ом}$ ,  $C = 100 \text{ мкФ}$ ,  $L = 29.4 \text{ мГн}$ ,  $E = 100 \text{ В}$  [2].

25. Цепь, состоящая из последовательно соединённых резистора  $R_1 = 100 \text{ Ом}$ , катушки  $L = 0.1 \text{ Гн}$  и конденсатора  $C = 2.5 \text{ мкФ}$ , подключается в момент  $t = 0$  к источнику синусоидальной ЭДС  $e = 100 \sin(314t + 30^\circ) \text{ В}$ . Определить ток в цепи после коммутации [2].

26. Напряжение источника в цепи (рисунок 1.45)  $u = 100 \sin(\omega t + \pi/2) \text{ В}$ . Коммутация происходит в момент  $t = 0$ .  $R_1 = 200 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 150 \text{ Ом}$ ,  $L = 0.7 \text{ Гн}$ ,  $C = 220 \text{ мкФ}$ ,  $f = 10 \text{ Гц}$ . Определить ток  $i_1$  после коммутации [2].

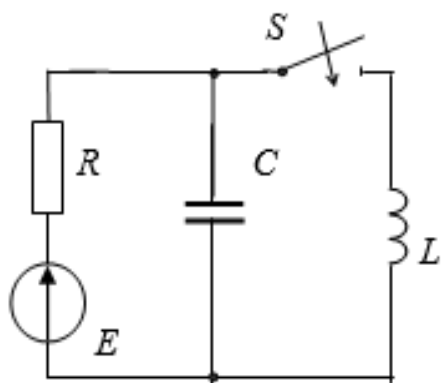


Рисунок 1.44

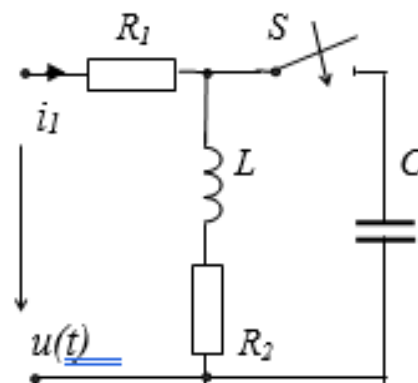


Рисунок 1.45

27. К источнику синусоидального напряжения через резистор  $R_1 = 50$  Ом присоединена нагрузка  $R_2 = 30$  Ом и  $L = 100$  мГн (рисунок 1.45) [2]. Частота напряжения источника 50 Гц. В момент, когда напряжение источника имеет максимальное значение 1000 В, параллельно нагрузке подключается конденсатор  $C = 200$  мкФ. Принуждённые комплексные значения тока в первой ветви до коммутации  $\underline{I}_{1m} = 11,63e^{j68^\circ 30'}$ , после коммутации  $\underline{I}_{1m} = 16,6e^{j18^\circ 50'}$ . Корни характеристического уравнения  $p_{1,2} = -200 \pm j200$ . Определить переходный ток  $i_1$  [2].

28. Решить предыдущую задачу, если коммутация происходит на четверть периода позже [2].

29. В приведённых ниже схемах электрических цепей определить соотношение параметров элементов, при которых характер переходного процесса будет критическим [2]. Рассчитать переходный процесс, задавшись соответствующими параметрами элементов и гармоническим источником, период которого должен быть в несколько раз меньше длительности переходного процесса. Определить момент коммутации, когда переходный процесс будет отсутствовать [2].

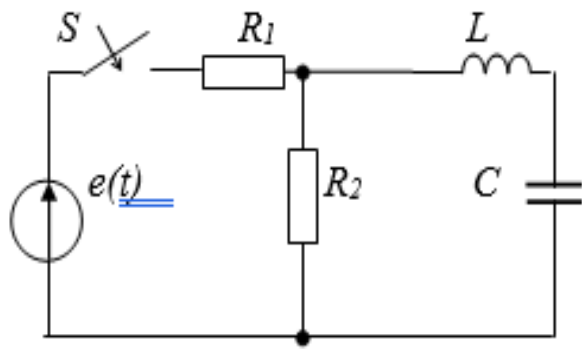


Схема 1

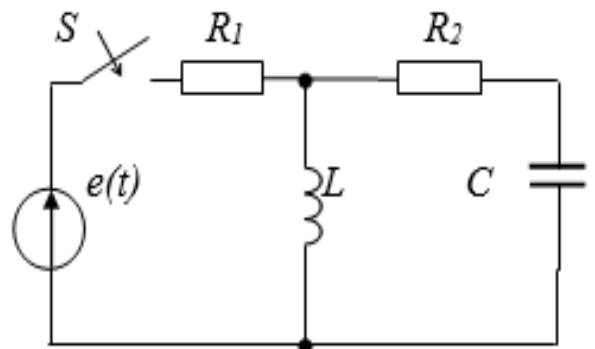


Схема 2

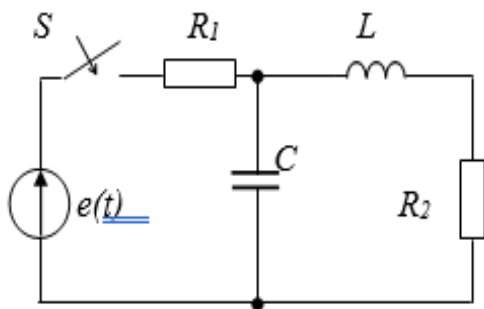


Схема 3

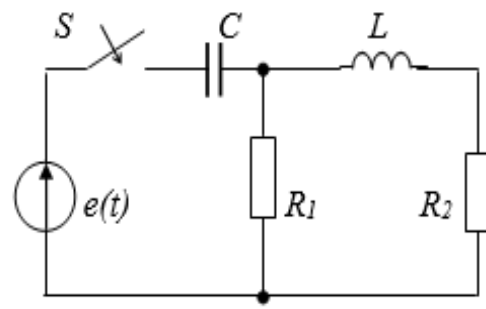


Схема 4

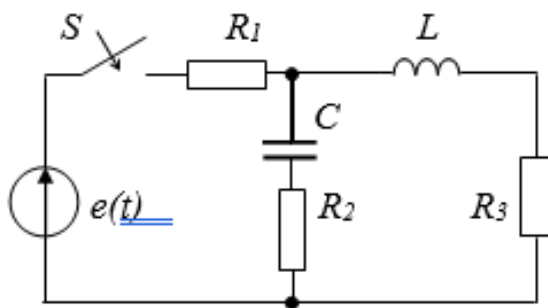


Схема 5

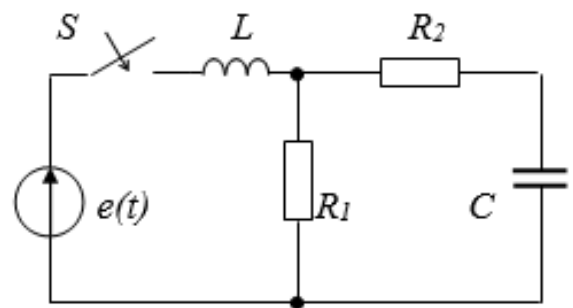


Схема 6

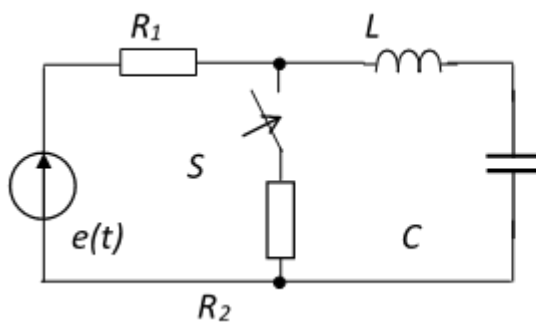


Схема 7

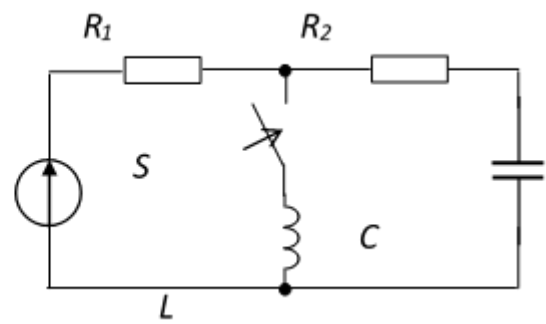


Схема 8



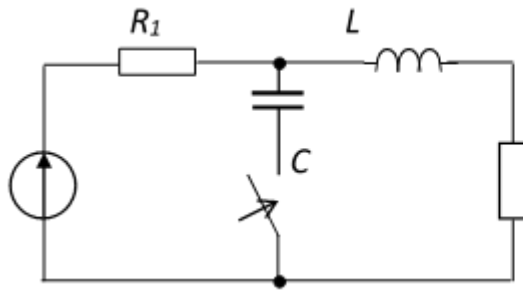


Схема 9

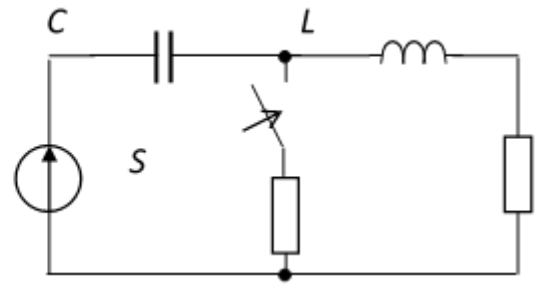


Схема 10

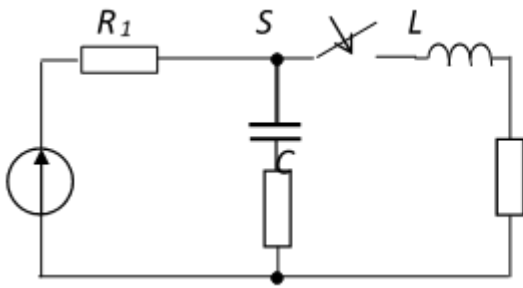


Схема 11

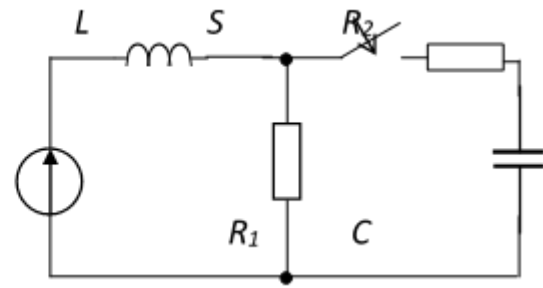


Схема 12

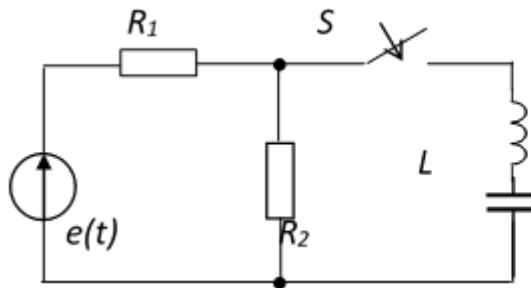


Схема 13

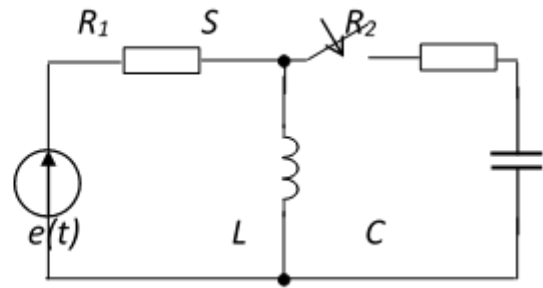


Схема 14

## ГЛАВА 2 ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Во всех предыдущих лекциях изучались электрические цепи с сосредоточенными параметрами, т. е. такие цепи, модели которых содержат конечное число элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$ . Геометрические размеры таких цепей и входящих в них элементов не имеют никакого значения, поскольку электрическая и магнитная энергии локализованы в конденсаторах и катушках индуктивности соответственно, а потери мощности приходятся на резисторы [1].

Однако не всякую электрическую цепь можно описать с помощью сосредоточенных параметров. Например, для направленной пространственной передачи электромагнитной энергии от одного радиотехнического устройства к другому используются электрические цепи, представляющие собой пары проводников той или иной конструкции, разделённые каким-либо диэлектриком. В таких цепях отсутствуют пространственные области с преимущественной локализацией электрического или магнитного полей. Модель подобной электрической цепи должна содержать бесконечное число бесконечно малых по величине пассивных элементов. Иначе говоря, в такой цепи имеет место *распределённые по всей её длине индуктивности, ёмкости и активные сопротивления*. По этой причине такие цепи называются *цепями с распределёнными параметрами* [1].

Среди цепей с распределёнными параметрами особая роль в технике связи принадлежит длинным линиям, изучению которых посвящена данная глава [1].

### 2.1 Первичные параметры длинной линии

Распределённый характер элементов и конечная скорость распространения электромагнитной энергии означает, что в линии напряжения и токи являются функциями не только времени  $t$ .

Зависимость токов и напряжений в линии от пространственных координат является тем основным признаком, который отличает длинные линии от других устройств системы связи [1].

### **Понятие длинной линии**

#### **Определение длинной линии:**

Для более, чёткого определения длинной линии вводят количественный критерий, связанный с соотношением между длиной  $l$  самой линии, измеряемой в метрах (в радиосистемах) или километрах (в многоканальных системах связи), и минимальной длиной волны  $\lambda_{\min}$  гармонических составляющих воздействия [1].

Этот критерий часто называют электрической длиной. С помощью этого критерия нетрудно определить, является ли в конкретных обстоятельствах исследуемая линия длинной или она может рассматриваться как система с сосредоточенными параметрами. Суть критерия состоит в следующем [1].

$$\lambda_{\min} = \frac{c}{f_{\max}}. \quad (2.1)$$

Пусть к линии длиной  $l$  приложено воздействие, максимальная частота гармонических составляющих которого равна  $f_{\max}$ . Тогда минимальная длина волны  $\lambda_{\min}$  определится из известной формулы [1]

где  $c$  – скорость света.

Рассмотрим два варианта соотношений между  $l$  и  $\lambda_{\min}$ :

1. Длина линии  $l$  превышает или имеет один порядок с минимальной длиной волны  $\lambda_{\min}$ . Это означает, что на линии длиной  $l > \lambda_{\min}$  укладывается более одного периода  $T=1/f_{\max}$  заданной гармоники. Если длина линии и длина

волны имеют один порядок, т. е. их длины соизмеримы, на линии укладывается *существенная часть одного периода*, по которой можно полностью определить параметры гармонического колебания. Наименьшей *существенной частью* периода является его четверть. Тогда, например, на линии длиной  $l = \lambda_{\min}/4$  укладывается ровно четверть периода заданного гармонического колебания (такая линия называется *четвертьволновым отрезком* и широко применяется на практике). Следовательно, и в том и в другом случае колебание с частотой  $f_{\max}$  будет иметь *различную фазу в разных точках* линии и потому запаздывать относительно изменения мгновенного значения напряжения или тока на входе линии. Иначе говоря, *в один и тот же момент времени мгновенные значения токов и напряжений в различных точках линии будут различными*. Такая линия и является *длинной*. Отмеченное запаздывание играет существенную роль при передаче сигналов и будет изучено в дальнейшем [1].

2. Длина линии  $l$  существенно меньше минимальной длины волны  $l \ll \lambda_{\min}$ . Тогда во всех точках линии колебания всех гармонических составляющих воздействия находятся практически в фазе, поэтому токи и напряжения *не зависят от пространственных координат*. Такая линия не является *длинной*, она считается системой с сосредоточенными параметрами и может быть заменена эквивалентной ей цепью из элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$  [1].

### **Пример 1.**

Имеется отрезок кабеля длиной  $l=0,3$  м. Определить его принадлежность к *длинной* линии или к цепи с сосредоточенными параметрами, если по нему передаётся телевизионный сигнал в одном случае с наивысшей частотой  $f_{\max 1}=8,5$  МГц, а в другом – в диапазоне дециметровых волн (частоты  $300 \div 3000$  МГц) [1].

*Решение.* Минимальная длина волны в первом случае составляет

$$\lambda_{\min 1} = \frac{c}{f_{\max 1}} = \frac{3 \cdot 10^8}{8,5 \cdot 10^6} = 35 \text{ м} \gg 0,3 \text{ м},$$

поэтому данный отрезок кабеля может считаться цепью с сосредоточенными параметрами [1].

Во втором случае, когда длина волны  $\lambda$  не превышает десятков сантиметров, этот же отрезок кабеля должен рассматриваться как длинная линия [1].

Отсюда следует *смысл критерия электрической длины линии:*

*одна и та же цепь представляет собой систему с распределёнными или сосредоточенными параметрами в зависимости от частоты приложенного к ней воздействия [1].*

В приведённом примере демонстрировался случай распространения высокочастотного колебания в отрезке кабеля. С другой стороны, для излучения радиоволн требуется разместить в пространстве систему проводников и подвести к ней колебания от радиопередатчика. Такая система называется *антенной*. Из критерия электрической длины следует ясное правило: *чтобы антенна хорошо излучала, её размеры должны быть сравнимы с длиной излучаемой волны*. Невозможно, например, излучать километровые волны с помощью небольшого куска проволоки. По этой причине длинноволновые передающие антенны (так называемые антенные поля) имеют гигантские размеры, измеряемые в километрах. Если же передатчик работает в диапазоне дециметровых волн, размеры передающей антенны не превосходят нескольких метров и антенна может представлять собой штырь. Например, радиостанция «Кварц», работающая в диапазоне  $1,5 \div 7$  МГц, имеет штыревую антенну длиной 1,5 м, а радиостанция Р-163-10К работает в диапазоне  $2 \div 30$  МГц и среди других антенн имеет антенну-штырь 2,4 м. [1].

Задача анализа процессов распространения электромагнитной энергии в длинных линиях достаточно сложна. Она является частной задачей анализа процессов распространения электромагнитной энергии в неоднородных средах. Такие задачи решаются с помощью уравнений Максвелла, однако непосредственное применение уравнений Максвелла для подобных задач

весьма затруднительно и выполнимо лишь при некоторых ограничениях, или допущениях, когда решения получаются особенно простыми, что показано в *разделе 3* [1].

Кроме того, поскольку в длинных линиях мгновенные значения тока и напряжения в различных точках различны, к ним не применимы законы Ома и Кирхгофа. Тем не менее к длинным линиям можно применять теорию электрических цепей и, в частности, теорию четырёхполюсников, если принять следующие основные допущения о длинных линиях:

- неизменность по всей длине линии конструктивных и электрических характеристик (материала, поперечного сечения проводов, их взаимного расположения, диэлектрической проницаемости среды, температуры и т. д.); такие линии называются *однородными линиями*;

- геометрические размеры линии в поперечном сечении малы по сравнению с длиной волны колебания, проходящего по ней;

- длина линии намного превышает расстояние между проводниками [1].

### **Классификация длинных линий**

Длинные линии классифицируются, в основном, по конструктивным признакам (рисунок 2.1), которые определяют электрические свойства линии [1].

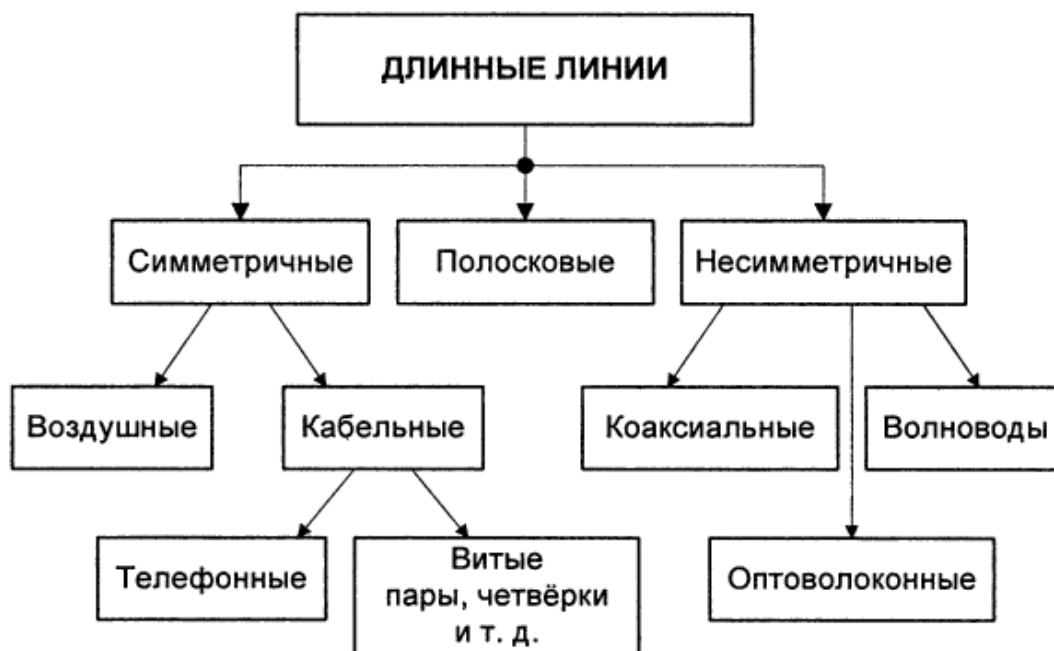


Рисунок 2.1. Классификация длинных линий

В настоящее время принята следующая классификация длинных линий:

- по расположению проводников относительно друг друга: *симметричные* и *несимметричные* [1];
- симметричные подразделяются на *воздушные* и *кабельные*;
- воздушные линии (рисунок 2.2, а) состоят из параллельных неизолированных проводов, укреплённых на опорах с помощью специальных изоляторов, расстояние между неизолированными проводами а значительно превышает диаметр проводов  $a \gg 2r$  [1]
  - кабельные линии подразделяются на телефонные (кабели категории 1) и витые (кабели категорий 2÷5) [1];
  - *телефонные кабели* представляют собой симметричную пару параллельных проводов (рисунок 2.2, б), помещённых в изолирующий диэлектрик [1];
  - *витые кабели* создаются на основе витых пар, каждая из которых состоит из двух скрученных друг с другом изолированных медных проводов (рисунок 2.2, в); например, скрученные между собой две пары образуют так

называемую четвёрку (рисунок 2.2, г); расстояние между проводами  $a$  в каждой в телефонном кабеле и витой паре больше диаметра проводов:  $a > 2r$ ;

– *несимметричные длинные линии* подразделяются на коаксиальные и оптоволоконные кабели и волноводы [1];

– *коаксиальный кабель* состоит из центрального медного провода и металлической оплетки (экрана), разделённых между собой слоем диэлектрика (внутренней изоляции) и помещённых в общую внешнюю оболочку (рисунок 2.2, д) [1];

– *структура оптоволоконного кабеля* (рисунок 2.2, е) похожа на структуру коаксиального кабеля, но вместо центрального медного провода здесь используется тонкое (диаметром около  $1 \div 10$  мкм) стекловолокно, а вместо внутренней изоляции – стеклянная или пластиковая оболочка, не позволяющая свету выходить за пределы стекловолокна [1];

– *волновод* (рисунок 2.2, ж) представляет собой сплошную трубу обычно прямоугольного сечения, размеры которого должны отвечать условиям:

$$\frac{\lambda}{2} \leq a \leq \lambda, b < \lambda \quad (2.2)$$

– причём половина длины волны должна укладываться целое число раз в одной из сторон сечения; изучение волноводов выходит за рамки теории цепей и является предметом теории и техники сверхвысоких частот (СВЧ) [1];

– отдельную группу составляют разнообразные *полосковые линии* (примеры показаны на рисунок 2.2, з, и), которые используются в технике сверхвысоких частот. Полосковая линия представляет собой плоскостную линию, которая направляет электромагнитные волны, в воздушной или иной диэлектрической среде вдоль двух или нескольких проводников, имеющих форму тонких полосок и пластин. Наряду с двухпроводными и коаксиальными линиями полосковые линии являются разновидностями волновода. Они – единственный тип линий передачи СВЧ-



сигналов, обеспечивающий возможность комплексной микроминиатюризации радиотехнических устройств и допускающий изготовление устройств СВЧ в интегральном исполнении. В гибридных интегральных схемах применяют так называемые *микророскопические* линии. К достоинствам полосковых линий и различных устройств на их основе относятся: возможность автоматизации их производства с применением плёночной технологии, в отдельных операциях подобной технологии изготовления *печатных* схем (и, следовательно, низкая трудоемкость, повышенная надёжность и хорошая воспроизводимость характеристик); сравнительная простота изготовления отдельных устройств на полосковых линиях и возможность точного изготовления технологически очень сложных функциональных узлов [1].

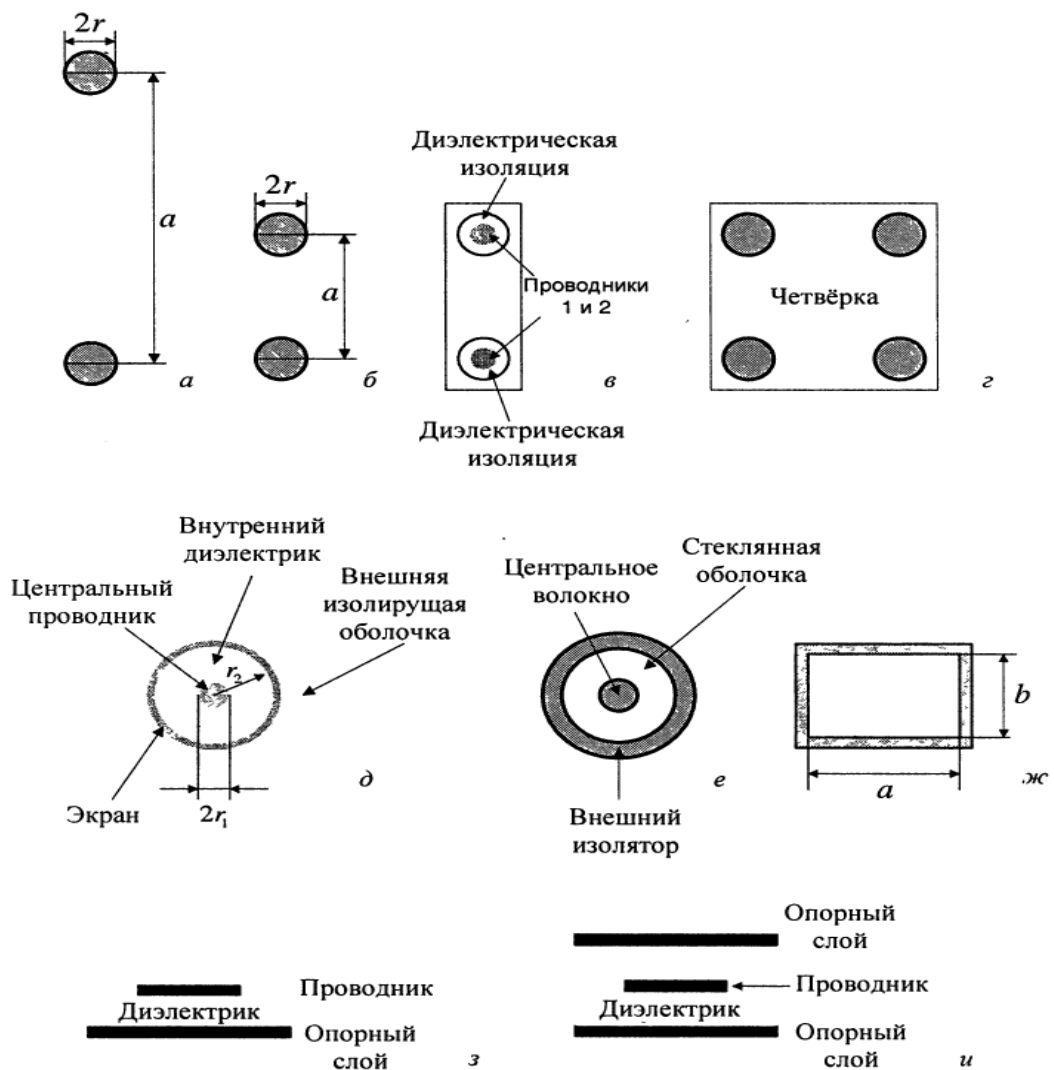


Рисунок 2.2. Примеры длинных линий

### Первичные параметры длинной линии

Согласно принятым допущениям о длинных линиях однородная линия может быть представлена своей моделью в виде цепи с бесконечно большим числом бесконечно малых по величине пассивных элементов (рисунок 2.3), равномерно расположенных по её длине [1].

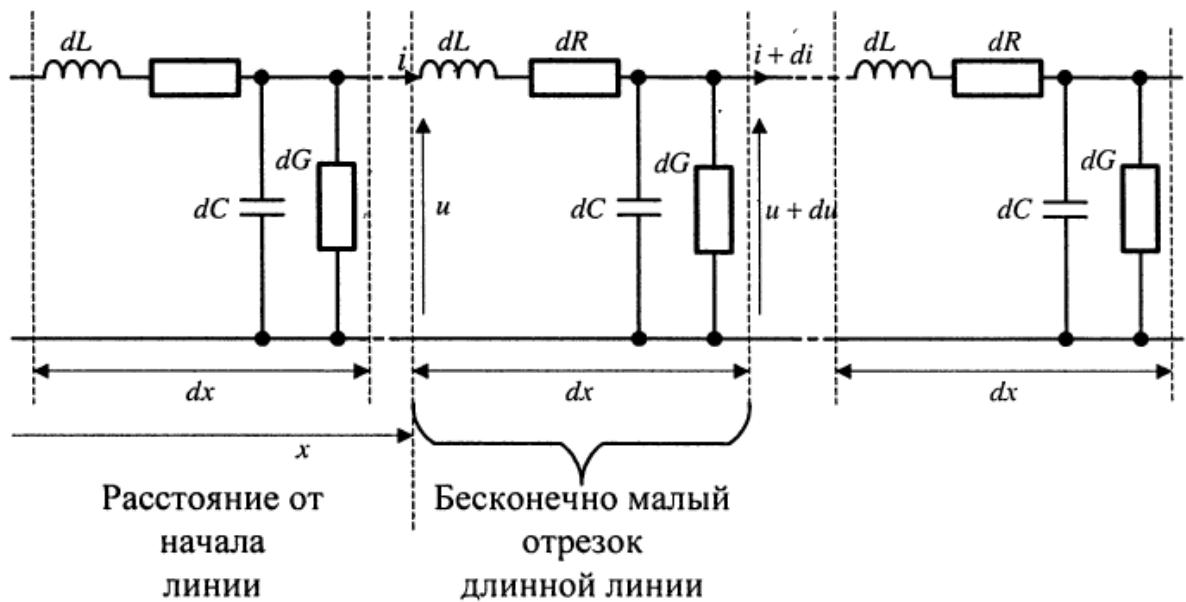


Рисунок 2.3. Первичные параметры длинной линии

Измерить и вычислить эти величины невозможно; тем не менее, знать электрические характеристики линии необходимо. Электрические характеристики линии оценивают через её параметры, которые разделяют на две группы: первичные и вторичные параметры [1].

*Первичные параметры* линии характеризуют её физическую природу и выражаются через сопротивление, индуктивность, ёмкость, проводимость, отнесённые к единице длины линии (1 км в линиях проводной связи и 1 м в линиях радиосвязи). По этой причине первичные параметры называют также *погонными* [1].

Следовательно, погонными параметрами являются:

- $R$  – погонное сопротивление (Ом/м или Ом/км),
- $L$  – погонная индуктивность (Г/м или Г/км),
- $G$  – погонная активная составляющая проводимости изоляции между проводами (См/м или См/км),
- $C$  – погонная ёмкость (Ф/м или Ф/км), или ёмкость конденсатора, образованного отрезком линии единичной длины [1].

*Замечание:*

В оптоволоконных кабелях первичным параметром является зависимость коэффициента преломления оптического волокна от расстояния до оптической оси [1].

*Вторичные параметры*, характеризуют отклик линии передачи на некоторые эталонные воздействия, в качестве которых наиболее часто используются гармонические сигналы различных частот [1].

Рассмотрим первичные параметры подробнее. В таблице 2.1 без доказательства приводятся расчётные формулы первичных параметров, вывод которых осуществляется методами теории электромагнитного поля, из которой известно, что плотность тока в уединённом проводе круглого сечения неравномерна и убывает от поверхности к центру провода. Скорость убывания тем больше, чем выше частота. Это явление известно под названием *поверхностного эффекта*, или *скин-эффекта*<sup>2</sup> [1].

Таблица 2.1 – Параметры длинной линии

<b>Параметр</b> $\left(\frac{X}{M}\right)$	<b>Расчётная формула</b>		<b>Примечание</b>	
	<b>Симметричная линия</b>			<b>Коаксиальный кабель</b>
	<b>Воздушная</b>	<b>Кабельная</b>		
Сопrotивление $R$	$8,36 \frac{\sqrt{f}}{r} 10^{-5}$ (для медных проводников)	Сложная функция $f, a, r$ ; определяется по графикам или таблицам	$4,18 \sqrt{f} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{k}{r_2}\right) 10^{-5}$	$f$ в Гц, $k = 1$ для сплошного проводника, $k = 1,8$ для оплётки, $a, r, r_1; r_2$ — в мм, $\epsilon$ — отн. диэлектрич. проницаемость среды (для вакуума $\epsilon - 1$ )
Индуктивность $L$	$4 \cdot 10^{-7} \ln \frac{a-r}{r}$		$2 \cdot 10^{-7} \ln \frac{r_2}{r_1}$	
Ёмкость $C$	$\frac{\epsilon \cdot 10^{-9}}{36 \ln \frac{a-r}{r}}$		$\frac{\epsilon \cdot 10^{-9}}{18 \ln \frac{r_2}{r_1}}$	
Проводимость $G$	$\approx 0$	$\omega C \operatorname{tg} \delta$	$\omega C \operatorname{tg} \delta$	$\operatorname{tg} \delta^1 \ll 1$

<sup>1</sup>  $\operatorname{tg} \delta$  – тангенс угла диэлектрических потерь  $\delta$  (или просто тангенс угла потерь); угол  $\delta$  представляет собой дополняющий до  $90^\circ$  угол между приложенными напряжением и током, протекающим через конденсатор с данным диэлектриком. Тангенс угла потерь используется для определения затухания в линии, вызываемого диэлектрическими потерями вследствие неидеальности диэлектрика [1].

<sup>2</sup> В основе поверхностного эффекта лежит индукционный механизм, обусловленный скоростью изменения магнитных полей в проводнике, поэтому эффект нарастает с ростом частоты. Выше некоторой пороговой частоты  $f_n$  поверхностный эффект "выталкивает" ток в более тонкий слой по периметру проводника, что вызывает неограниченный рост кажущегося активного сопротивления, которое возрастает пропорционально корню квадратному частоты [1].

Неравномерность распределения плотности тока по сечению провода эквивалентна уменьшению площади его поперечного сечения и,

следовательно, увеличению сопротивления провода с ростом частоты. В то же время скин-эффект уменьшает внутреннюю индуктивность при возрастании частоты. По этой причине в технике связи используются кабели разнообразной конструкции, отличающиеся способностью эффективно передавать сигналы различных частотных диапазонов [1].

**Сопротивление  $R$**  проводов при температурах, отличных от  $20^\circ$ , уточняется по формуле

$$R_T = R * (1 + \sigma_T * (T - 20^0)), \quad (2.3)$$

где  $\sigma_T$  [1/град] – температурный коэффициент,  $T$  – температура  $С^\circ$ . Сопротивление растёт пропорционально квадратному корню из частоты колебания [1].

**Индуктивность  $L$**  определяется отношением магнитного потока, сцепляющегося с контуром единичной длины, к току, вызывающему этот поток. Индуктивность линии складывается из внешней и внутренней индуктивностей. *Внешняя индуктивность* определяется только геометрическими размерами линии и не зависит от частоты. *Внутренняя индуктивность* зависит от материала проводов, их диаметра и частоты. Скин-эффект уменьшает внутреннюю индуктивность с ростом частоты [1].

**Ёмкость  $C$**  определяется отношением заряда, приходящегося на единицу длины линии, к напряжению между проводами линии; ёмкость от частоты практически не зависит.

**Проводимость  $G$**  обусловлена потерями в диэлектрике и зависит от частоты: с ростом частоты проводимость увеличивается [1].

Любая линия обладает некоторой рабочей полосой частот от  $f_{\min}$  до  $f_{\max}$ , на которых частотно зависимые первичные параметры имеют различные значения, поэтому при анализе колебаний в линии полагают *численные значения первичных параметров линии равными их средним значениям в рабочей полосе* [1].

Теперь можно уточнить **определение однородной линии**, введённое в качестве первого допущения о длинных линиях.

**Определение:**

*Однородной линией* называется такая линия, первичные параметры которой неизменны по всей длине.

*Замечание:*

Линию с неравномерным распределением первичных параметров часто можно разбить на однородные участки [1].

## **2.2 Уравнения передачи длинной линии**

*Постановка задачи.* Как было отмечено, напряжения и токи в длинной линии являются функциями времени  $t$  и координаты  $x$ , отсчитываемой от одного из концов линии. Этот факт значительно усложняет анализ распределения напряжения и тока для колебания произвольной формы. Дело существенно упрощается, если воспользоваться *режимом установившихся гармонических колебаний*, поскольку для этого режима заранее известен закон изменения напряжений и токов от времени в любом сечении линии. С другой стороны, для длинных линий, в силу распределённости её параметров по всей длине, неприменимы законы Ома и Кирхгофа. Если же длинную линию представить как цепь с бесконечно большим числом бесконечно малых по величине пассивных элементов (см. рисунок 2.3), то в цепи можно выделить бесконечно большое число бесконечно малых отрезков и каждый из них рассматривать как четырёхполюсник, находящийся на расстоянии  $x$  от начала линии. Параметры каждого четырёхполюсника бесконечно малы. Для такого отрезка длинной линии применимы законы Ома и Кирхгофа [1].

### **Задача 1.**

Найти законы изменения напряжения и тока вдоль однородной линии в режиме установившихся гармонических колебаний.

**Решение.** Выделим бесконечно малый отрезок длиной линии  $dx$ , находящийся на расстоянии  $x$  от её начала (рисунок 2.4.). На таком участке можно положить, что токи являются квазистационарными и его эквивалентная схема содержит сосредоточенные параметры: последовательно включённые индуктивность  $dL = Ldx$  и сопротивление  $dR = Rdx$  и параллельно включённые ёмкость  $dC = Cdx$  и активную проводимость  $dG = Gdx$  [1].

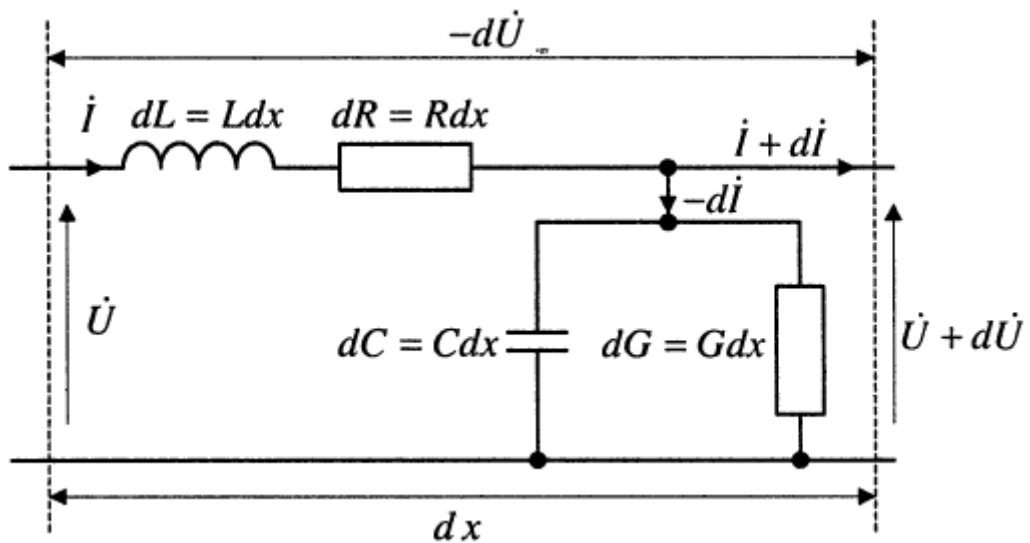


Рисунок 2.4. Схема к примеру задачи 1

Воспользуемся символическим методом анализа гармонических колебаний, для чего обозначим комплексные напряжения и токи в начале и в конце отрезка как  $\dot{U}, i, \dot{U} + d\dot{U}, i + di$ . К данному отрезку длиной линии, представляющему собой четырёхполюсник с сосредоточенными параметрами, можно применить законы Ома и Кирхгофа. Тогда при выбранных направлениях отсчёта согласно законам Кирхгофа падение напряжения на отрезке  $dx$  составит  $-d\dot{U}$ , а ток в поперечной проводимости равен  $-di$ . [1]

Для указанных напряжения и тока на отрезке  $dx$  можно по закону Ома записать пару уравнений:

$$\begin{cases} -d\dot{U} = \dot{I}(Rdx + j\omega Ldx) = \dot{I}(R + j\omega L)dx; \\ -d\dot{I} = (\dot{U} + d\dot{U})(Gdx + j\omega Cdx) = \dot{U}(G + j\omega C)dx + \underbrace{(G + j\omega C)d\dot{U}dx}_{\text{Второй порядок малости}}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Второе слагаемое в уравнении (2.4) содержит произведение  $d\dot{U}dx$  и потому является величиной более высокого порядка малости по сравнению с первым слагаемым. По этой причине вторым слагаемым можно пренебречь. Разделив далее оба уравнения на  $dx$ , получаем систему дифференциальных уравнений с неизвестными  $\dot{U}$  и  $\dot{I}$  [1]:

$$\begin{cases} -\frac{d\dot{U}}{dx} = \dot{I}(R + j\omega L); \\ -\frac{d\dot{I}}{dx} = \dot{U}(G + j\omega C). \end{cases} \quad (2.5)$$

Уравнения (2.5) называются *телеграфными*, т. к. впервые были получены для линий телеграфной связи. В этих уравнениях  $\dot{U}$  и  $\dot{I}$  представляют собой комплексные амплитуды напряжения и тока в сечении линии, удалённом на расстояние  $x$  от начала линии [1].

Чтобы получить законы изменения напряжений и токов гармонических колебаний, необходимо решить дифференциальные уравнения (2.5) [1].



Найдём комплексное напряжение  $\dot{U}$  в сечении на расстоянии  $x$  от начала линии. Для этого продифференцируем первое уравнение из (2.5) по  $x$  [1]:

$$-\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = \frac{d\dot{I}}{dx}(R + j\omega L)$$

и подставим сюда выражение для  $\frac{d\dot{I}}{dx}$  из второго уравнения (2.5) [1]:

$$-\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = -\dot{U}(G + j\omega C)(R + j\omega L).$$

Введя обозначение

$$(G + j\omega C)(R + j\omega L) = \gamma^2, \quad (2.6)$$

получаем однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} - \gamma^2\dot{U} = 0, \quad (2.7)$$

общее решение которого для напряжения в точке  $x$ , как известно, имеет вид:

$$\dot{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}, \quad (2.8)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  – постоянные интегрирования, а  $\pm \gamma$  – корни характеристического уравнения  $p^2 - \gamma^2 = 0$  [1]

Теперь нетрудно найти общее решение для распределения тока  $\dot{i}$  в линии, если из первого уравнения (2.5) записать

$$\dot{i} = \frac{1}{R + j\omega L} \left( -\frac{d\dot{U}}{dx} \right)$$

и подставить сюда результат дифференцирования по  $x$  уравнения (2.8) [1]:

$$\dot{i} = \frac{-1}{R + j\omega L} \left( -A_1 \gamma e^{-\gamma x} + A_2 \gamma e^{\gamma x} \right) = \frac{\gamma}{R + j\omega L} \left( A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x} \right).$$

Комплексная переменная

$$Z_B = \frac{R + j\omega L}{\gamma} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = |Z_B| e^{j\varphi_B} \quad (2.9)$$

называется *волновым сопротивлением длинной линии*. При использовании (2.9) решение для тока в точке  $x$  примет вид [1]:

$$\dot{i} = \frac{1}{Z_B} \left( A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x} \right). \quad (2.10)$$

Пара уравнений (2.8) и (2.10) составляет общее решение телеграфных уравнений (2.5) для напряжения и тока в точке  $x$ :

$$\begin{cases} \dot{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}; \\ \dot{i} = \frac{A_1}{Z_B} e^{-\gamma x} - \frac{A_2}{Z_B} e^{\gamma x}. \end{cases} \quad (2.11)$$

Таким образом, поставленная задача решена: получены *уравнения передачи длинной линии* (2.11) [1].

Постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$  зависят только от значений напряжений и токов на внешних зажимах линии  $\dot{U}_0$  и  $\dot{i}_0$ , т. е. от начальных условий. Следовательно, при  $x = 0$  из (2.11) получаем [1]:

$$\begin{cases} \dot{U}_0 = A_1 + A_2; \\ \dot{i}_0 = \frac{A_1}{Z_B} - \frac{A_2}{Z_B}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} A_1 = \frac{\dot{U}_0 + \dot{i}_0 Z_B}{2}; \\ A_2 = \frac{\dot{U}_0 - \dot{i}_0 Z_B}{2}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Параметры  $\gamma$  и  $Z_B$  называемые соответственно *коэффициентом распространения* и *волновым сопротивлением*, относятся к вторичным параметрам длинной линии и зависят исключительно от свойств линии и частоты гармонических колебаний и не меняются при изменении начальных условий [1].

Коэффициент распространения  $\gamma$  в общем случае является комплексной величиной и записывается в виде [1]:

$$\gamma = \sqrt{(G + j\omega C)(R + j\omega L)} = \alpha + j\beta, \quad (2.13)$$

где:

$\alpha$  – коэффициент затухания;

$\beta$  – коэффициент фазы.

## ГЛАВА 3 ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Теория Максвелла является единой теорией электромагнитного поля, позволяющей решить основную задачу электродинамики: для заданной системы электрических зарядов и токов найти характеристики электромагнитного поля.

Теория Максвелла – макроскопическая теория. В ней рассматривается электромагнитное поле, создаваемое протяженными зарядами и токами, размеры которых неизмеримо больше размеров атомов. Математическим выражением теории Максвелла являются четыре уравнения, которые записываются в интегральной и дифференциальной форме. Уравнения в интегральной форме справедливы для макроскопических контуров и поверхностей, уравнения в дифференциальной форме представляют собой соотношения между характеристиками поля в конкретной точке. Связь между уравнениями в интегральной и дифференциальной форме устанавливается с помощью теорем Остроградского-Гаусса и Стокса. Прежде чем формулировать уравнения Максвелла, необходимо познакомиться с еще одной характеристикой векторного поля – его ротором.

### 3.1 Ротор векторного поля

Как уже отмечалось, векторным полем называется пространство или некоторая его часть, в каждой точке которого определена векторная функция трех пространственных координат и времени  $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z, t)$ . Если значение функции зависит от времени, поле называется нестационарным, в противном случае – стационарным. Ротором векторного поля  $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z, t)$  называется вектор, обозначаемый  $\text{rot} \vec{a}$ , который можно представить как векторное произведение [1]:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = [\vec{\nabla}, \vec{a}]. \quad (3.1)$$

Здесь  $\vec{\nabla}$  – набла-вектор, который представляет собой векторный дифференциальный оператор первого порядка (оператор Гамильтона):

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}, \quad \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}. \quad (3.2)$$

Для того чтобы найти координаты вектора  $\operatorname{rot} \vec{a}$ , представим векторное произведение  $[\vec{\nabla}, \vec{a}]$  в виде детерминанта третьего порядка и раскроем его по элементам первой строки:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left( \frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Таким образом, проекции ротора на координатные оси (его координаты):

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \vec{a})_x &= \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i}, \\ (\operatorname{rot} \vec{a})_y &= - \left( \frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) \vec{j}, \\ (\operatorname{rot} \vec{a})_z &= \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В чем же заключается геометрический смысл ротора как характеристики векторного поля? Для ответа на этот вопрос необходимо сформулировать теорему Стокса:

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{a} \, d\vec{s} = \oint_L \vec{a} \, d\vec{l}. \quad (3.5)$$

Согласно этой теореме, поток ротора через поверхность  $s$  численно равен циркуляции вектора  $\vec{a}$  вдоль контура, ограничивающего эту поверхность.

Выберем на поверхности  $s$ , ограниченной контуром  $L$ , точку  $P$ . Используя теорему Стокса, а также свойства поверхностных интегралов, можно показать, что проекция вектора  $rot\vec{a}$  на направление нормали к поверхности в этой точке численно равна пределу отношения циркуляции по контуру  $L$  к площади поверхности при условии, что поверхность стягивается в точку  $P$ :

$$\text{пр}_{\vec{n}} rot\vec{a} = \lim_{s \rightarrow P} \frac{\oint_L \vec{a} d\vec{l}}{s}. \quad (3.6)$$

Из этого равенства следует, что ротор векторного поля в определенной точке связан с циркуляцией поля в этой же точке: если циркуляция поля равна нулю, ротор также равен нулю. Поскольку циркуляция вектора  $\vec{a}$  равна интегралу по контуру, ротор поля иногда называют вихрем, характеризующим завихренность поля.

Теперь обратимся к конкретным полям – электростатическому и магнитному. Как уже отмечалось, стационарное электрическое поле потенциально; это означает, что работа сил поля при перемещении заряда не зависит от траектории, а в случае замкнутой траектории работа равна нулю:

$$\oint_L q\vec{E} d\vec{l} = 0 \Rightarrow \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (3.7)$$

Поскольку циркуляция вектора напряженности равна нулю,  $rot\vec{E} = 0$ . Именно поэтому электростатическое поле иногда называют безвихревым.

Теперь найдем ротор напряженности стационарного магнитного поля. Выше уже отмечалось, что  $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_i I_i$ , т. е. циркуляция вектора  $\vec{H}$  численно

равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых контуром интегрирования. Если ток распределен непрерывно по поверхности, «натянутой» на контур, то  $\sum_i I_i = \int_S \vec{j} d\vec{s}$  (здесь  $\vec{j}$  – вектор плотности тока). Поэтому  $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{s}$ . По теореме Стокса  $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{H} d\vec{s}$ ; в соответствии с этим имеем:  $\int_S \text{rot} \vec{H} d\vec{s} = \int_S \vec{j} d\vec{s} \Rightarrow \text{rot} \vec{H} = \vec{j}$ , т. е. ротор напряженности магнитного поля в определенной точке поля равен плотности тока проводимости в этой же точке. Поскольку, вообще говоря,  $\text{rot} \vec{H} \neq 0$ , магнитное поле называют вихревым или соленоидальным.

### 3.2. Вихревое электрическое поле

Как уже отмечалось, индукционный ток возникает при перемещении либо деформации контура в стационарном магнитном поле, а также при изменении индукции поля. Если контур перемещается либо деформируется в стационарном поле, роль э.д.с. играет сила Лоренца. Если же индукционный ток в неподвижном контуре обусловлен изменением индукции магнитного поля, остается предположить, что электроны проводника движутся под действием электрического поля (ниже мы убедимся в том, что это поле является вихревым). В отличие от электростатического поля, создаваемого зарядами, вихревое поле порождается переменным магнитным полем.

Если вектор напряженности вихревого поля обозначить  $\vec{E}_B$ , то по определению:

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_B d\vec{l}. \quad (3.8)$$

С другой стороны,

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi = \int_S \vec{B} d\vec{s}, \quad (3.9)$$



где  $s$  – поверхность, охватываемая контуром. Следовательно,

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} ds. \quad (3.10)$$

Поскольку поверхность неподвижна, операции интегрирования и дифференцирования можно поменять местами:

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\int_s \frac{d\vec{B}}{dt} ds. \quad (3.11)$$

По теореме Стокса:

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = \int_s \text{rot} \vec{E}_B ds. \quad (3.12)$$

Поэтому

$$\int_s \text{rot} \vec{E}_B ds = -\int_s \frac{d\vec{B}}{dt} ds \Rightarrow \text{rot} \vec{E}_B = -\frac{d\vec{B}}{dt}. \quad (3.13)$$

Следовательно, электрическое поле, которое приводит к возникновению индукционной э.д.с. в случае нестационарного магнитного поля, характеризуется ненулевым ротором напряженности и поэтому является вихревым (линии напряженности такого поля всегда замкнуты).

Максвелл предположил, что переменное магнитное поле порождает вихревое поле независимо от наличия в пространстве проводящего контура. В общем случае электрическое поле складывается из электростатического и вихревого:  $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_B$  (здесь  $\vec{E}_q$  – напряженность электростатического поля). Поскольку  $\text{rot} \vec{E}_q = 0$ , имеем:  $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ .

Существование взаимосвязи между электрическим и магнитным полем указывает на то, что их раздельное рассмотрение возможно только в строго

определенной системе отсчета. Действительно, электростатическое поле создается неподвижными электрическими зарядами. Однако эти же заряды, перемещающиеся в другой системе отсчета, создают магнитное поле. Аналогично, неподвижный в определенной системе отсчета провод с током создает в ней стационарное магнитное поле. Однако относительно другой системы провод может перемещаться; при этом может возникать переменное магнитное поле и, соответственно, вихревое электрическое поле.

Таким образом, поле, которое в одной системе отсчета является чисто электрическим или магнитным, в другой системе может представлять собой совокупность переменных электрических и магнитных полей, образующих единое электромагнитное поле.

### 3.3. Ток смещения

Английский физик Д.К. Максвелл был гениальным человеком. Его интуиция подсказывала ему, что переменное электрическое поле должно порождать магнитное поле аналогично тому, как переменное магнитное поле создает вихревое электрическое поле. В качестве физической величины, характеризующей способность вихревого электрического поля создавать магнитное поле, Максвелл ввел в электродинамику ток смещения.

По теореме Гаусса для электрического поля:

$$\oint_s \vec{D} d\vec{s} = q. \quad (3.14)$$

где  $\vec{D}$  – вектор электрической индукции. В результате дифференцирования последнего равенства имеем:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_s \vec{D} d\vec{s}. \quad (3.15)$$

Считая поверхность  $s$  неподвижной, символы интегрирования и дифференцирования можно поменять местами:

$$\frac{dq}{dt} = \oint_s \frac{d\vec{D}}{dt} \vec{ds}. \quad (3.16)$$

Поскольку размерность производной  $d\vec{D}/dt$  равна  $1 \text{ А/м}^2$ , Максвелл предложил назвать эту производную плотностью тока смещения:

$$\frac{d\vec{D}}{dt} = \vec{j}_{\text{см}}. \quad (3.17)$$

Учитывая, что вектор  $\vec{D}$  зависит, вообще говоря, не только от времени, но и от координат точки поля, правильнее использовать символ частной производной:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}_{\text{см}}. \quad (3.18)$$

Как известно, в диэлектрике  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ . Поэтому:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (3.19)$$

Здесь первое слагаемое представляет собой плотность тока смещения в вакууме, второе – плотность поляризационного тока смещения, обусловленного упорядоченным движением связанных зарядов при поляризации. В общем случае токи проводимости и токи смещения сосуществуют, поэтому полный ток равен их сумме.

В качестве примера, иллюстрирующего роль токов смещения, можно упомянуть электрическую цепь, содержащую конденсатор. Если ее подключить к источнику постоянной э.д.с, тока не будет из-за разрыва в цепи,

обусловленного наличием конденсатора. Если же используется источник переменной э.д.с, в цепи существует ток. Понятно, что в последнем случае цепь замыкается токами смещения, обусловленными переменным электрическим полем между обкладками конденсатора.

Как уже отмечалось, циркуляция вектора напряженности магнитного поля численно равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых контуром интегрирования:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_i I_i. \quad (3.20)$$

Иногда это равенство называют законом полного тока. Согласно гипотезе Максвелла ток смещения, подобно току проводимости, является источником магнитного поля. Исходя из этого Максвелл обобщил закон полного тока:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I + I_{\text{см}}, \quad (3.21)$$

где  $I = \int_S \vec{j} d\vec{s}$ ,  $I_{\text{см}} = \int \vec{j}_{\text{см}} d\vec{s}$ . Имеем:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{s} + \int \vec{j}_{\text{см}} d\vec{s} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{s}. \quad (3.22)$$

По теореме Стокса:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{H} d\vec{s}. \quad (3.23)$$

Следовательно,

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (3.24)$$

### 3.4. Уравнения Максвелла

Таким образом, введение тока смещения «уравнило в правах» электрическое и магнитное поле. Действительно, из явления электромагнитной индукции следует, что переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле; из закона полного тока, обобщенного Максвеллом, вытекает, что переменное электрическое поле создает магнитное поле.

Установленная Максвеллом неразрывная связь электрических и магнитных полей позволила ему создать единую теорию электрических и магнитных явлений, математическим выражением которой являются четыре уравнения. Впоследствии эти уравнения были названы уравнениями Максвелла; в электродинамике они играют такую же роль, как законы Ньютона в механике. Первую пару составляют уравнения:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \operatorname{div}\vec{B} = 0. \quad (3.25)$$

Первое из них по существу представляет собой закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме. Если говорить более конкретно, из первого уравнения следует, что переменное магнитное поле создает вихревое электрическое поле. Второе уравнение отражает тот факт, что в природе не существуют магнитные заряды, которые создавали бы магнитное поле подобно тому, как электрические заряды создают электрическое поле. Можно сказать, что из второго уравнения следует соленоидальность магнитного поля.

Вторую пару образуют уравнения:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \operatorname{div}\vec{D} = \rho. \quad (3.26)$$

Первое из этих уравнений устанавливает связь между полным током, состоящим из тока проводимости и тока смещения, и магнитным полем. Из этого уравнения получается, что переменное электрическое поле создает магнитное поле. Второе уравнение отражает тот факт, что источником электрического поля являются электрические заряды. Для того чтобы корректно решить основную задачу электродинамики (по заданному распределению сторонних электрических зарядов и токов проводимости найти характеристики электромагнитного поля), эти четыре уравнения необходимо дополнить тремя материальными уравнениями:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (3.27)$$

Система уравнений (3.25) – (3.27) составляет основу электродинамики покоящихся сред. Поскольку каждое из этих уравнений относится к определенной точке поля, их называют уравнениями Максвелла в дифференциальной (локальной) форме.

Проинтегрируем уравнение:

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.28)$$

по произвольной поверхности  $S$ , левую часть преобразуем по теореме Стокса, в правой части поменяем местами символы интегрирования и дифференцирования:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{s} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (3.29)$$

Следовательно, первое из уравнений Максвелла в интегральной форме представляет собой закон электромагнитной индукции.

Проинтегрируем уравнение  $\text{div} \vec{B} = 0$  по объему  $V$ :

$$\int_V \operatorname{div} \vec{B} dv = 0. \quad (3.30)$$

Согласно теореме Остроградского-Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{B} dv = \oint_S \vec{B} d\vec{s}. \quad (3.31)$$

С учетом равенства (3.30) имеем:  $\oint_S \vec{B} d\vec{s} = 0$ . Следовательно, второе из уравнений Максвелла в интегральной форме представляет собой теорему Гаусса для магнитного поля. Рассуждая аналогично, можно показать, что уравнения (3.26), записанные в интегральной форме, дают нам закон полного тока и теорему Гаусса для электрического поля.

Развитая Максвеллом единая теория электрического и магнитного поля позволила объяснить все известные на то время опытные факты и предсказать ряд новых явлений. В частности, Максвелл пришел к выводу о существовании электромагнитных волн и вычислил скорость их распространения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Улахович Д. Основы теории линейных электрических цепей учеб. Пособие. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2009. – 816 с.
2. Шакурский В.К. Теоретические основы электротехники. 2 ч. Анализ переходных режимов в линейных и нелинейных электрических цепях: Учебно-методическое пособие. – Тольятти: ТГУ, 2007. – 88 с.
3. ГОСТ Р 52002-2003. ЭЛЕКТРОТЕХНИКА. Термины и определения основных понятий.
4. ГОСТ 2.710-81 ЕСКД. Обозначения буквенно-цифровые в электрических схемах.
5. Горбунов А.Н. и др. Теоретические основы электротехники: Учебник для с.-х. вузов / А.Н. Горбунов, И.Т. Туганбаев, В.И. Загинайлов, А.С. Знаев, А.В. Кравцов, И.Я. Редько. – Астана, 2012. – 413 с.
6. Горбунов А.Н. и др. Теоретические основы электротехники: Учебник для с.-х. вузов / А.Н. Горбунов, И.Д. Кабанов, А.В. Кравцов, И.Я. Редько. – М., 2003. – 304 с.
7. Горбунов А.Н. и др. Электротехника: Учебник для с.-х. вузов / А.Н. Горбунов, И.Д. Кабанов, А.В. Кравцов, Петров В.А., И.Я. Редько. Под ред. А.В. Кравцова. – М., 2003. – 271 с.
8. Бессонов Л.А.: Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: Учебник. / Л.А. Бессонов. – 10-е изд. – М.: Гардарики, 2002. – 638 с.
9. Демирчан К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники. В 3-х т. Том 2. Учебник для вузов. 4-е изд. / К.С. Демирчан, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин. – В 3-х т. Том 2. – СПб: Питер, 2003. – 576 с.
10. Демирчан К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники. Учебник для вузов. 4-е изд. / К.С.



Демирчан, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин. – В 3-х т. Том 3. – СПб: Питер, 2003. – 377 с.

11. Немцов М.В. Электротехника и электроника: Учебник для вузов / М.В. Немцов.– М.: МЭИ, 2004. – 460 с.

12. Рекус Г.Г., Белоусов А.И. Сборник задач и упражнений по электротехнике и основам электроники/ Г.Г. Рекус, А.И. Белоусов– М.: Высшая школа, 2001. – 416 с.

13. Меньшов Е.Н. Электрические цепи с распределенными параметрами: методические указания к решению задач по ТОЭ, ч. 3. / Сост. Е.Н. Меньшов. – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – 50 с.

14. Боев В.М. Электромагнитное поле. Текст лекций для студентов специальности 141. «Электроэнергетика, электротехника и электромеханика» / В.М. Боев. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2020. – 179 с.